Exercices d'applications

<u>EXERCICE A-1</u> Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 te^x dt$ et $J = \int_0^1 te^x dx$

$$K = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \quad \text{et} \quad L = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}, \qquad \text{et enfin,} \qquad M = \int_0^3 f(t)dt \text{ où } f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{2t}{t^2+1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

<u>EXERCICE A-2</u> Pour $x > 0$, justifier l'existence et déterminer le signe du réel $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t^3} dt$

Étudier la parité de $F(x)$. Dresser le tableau de variation de F.
Pour déterminer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, on pourra minorer $\arctan(t)$ sur $\left[\frac{1}{x}, x\right]$.

<u>EXERCICE A-3</u> Déterminer la primitive de f où

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ s'annulant en $\dfrac{\pi}{3}$

b) $f(x) = \text{ch}^3 x$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0

c) $f(x) = \dfrac{1}{\text{ch}(x)\text{sh}(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ de limite nulle à l'infinie

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{t}}{t+1}$ sur $]0, +\infty[$ s'annulant en 1

<u>EXERCICE A-4</u> Dresser le tableau de variation de $G : x \mapsto \int_0^{x^3} \frac{dt}{\text{ch}(t)}$ (Pour la limite, on pourra expliciter $G(x)$)

<u>EXERCICE A-5</u> Calculer les intégrales suivantes : 1) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx$ et $I_2 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

2) $J = \int_0^1 \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 - x - 6} dx$ 3) $K_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{1 - x^2}$ et $K_2 = \int_2^3 \dfrac{dx}{1 - x^2}$ 4) $L = \int_0^1 (x^2 + 1)e^{2x} dx$

<u>EXERCICE A-6</u> Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^n}$ Calculer I_0 et I_1.

En remarquant que $\dfrac{1}{1 + x^2} = \dfrac{1 + x^2}{(1 + x^2)^2}$ et en utilisant une intégration par parties, calculer I_2.
Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire I_3

<u>EXERCICE A-7</u> Calculer : 1) $I = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}dt}{1 + t}$ en posant $u = \sqrt{t}$

2) $J = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \text{sh}(t)\text{th}(t) \, dt$ en posant $u = \text{sh}(t)$

3) $K = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - t^2} \, dt$ à l'aide d'un changement de variable.

<u>EXERCICE A-8</u> Si $a > 0$, expliciter les primitives $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ et les primitives $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

<u>EXERCICE A-9</u> 1) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$ 2) Calculer l'intégrale $J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}$

Exercices de référence

Exercice R-1 Déterminer les primitives suivantes :

$$1)\ \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \qquad 2)\ \int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}dx \text{ sur } \mathbb{R} \qquad 3)\ \int \frac{2x-1}{(x+1)^2}dx$$

Exercice R-2 Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos^n x)\cos(nx)\,dx$ où $n \in \mathbb{N}$

Exercice R-3 A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t^2}dt$ pour $x > 0$

Exercice R-4

1) On pose $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \sin(2x)}$. Justifier que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}$

2) Trouver les réels a, b et c tels que : $\forall u \in \left[0; \frac{1}{2}\right],\quad \dfrac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)} = \dfrac{a}{1-u} + \dfrac{b}{1+u} + \dfrac{c}{1+2u}$
puis calculer I

Exercice R-5 Calculer les primitives suivantes (on précisera le domaine d'existence des primitives)

1) $\displaystyle\int \frac{x^7}{(x^4+1)^2}dx$ *(Utiliser un changement de variable)* 2) $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx$ *(Utiliser des IPP)*

Exercices d'entraînement

Exercice E-1 On considère l'application définie sur $]1; +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln t)^2}$

1) Étudier le sens de variation de F sur $]1; +\infty[$

2) a) En utilisant le sens de variation de $\left[t \mapsto \dfrac{1}{(\ln t)^2}\right]$, obtenir un encadrement de $F(x)$ sur $]1; +\infty[$

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

3) Aprés avoir justifié pour t dans $]1; +\infty[$ l'inégalité $0 < \ln t \leq t-1$. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$

Exercice E-2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\operatorname{sh}^n x}$

1) Calculer I_1 à l'aide d'un changement de variable.

2) Établir une relation entre I_n et I_{n+2} pour $n \in \mathbb{N}^*$ *(On pourra remarquer que* $\dfrac{1}{sh^n x} = \dfrac{sh^2 x}{sh^{n+2} x}$ *si* $x > 0$*)*

3) En déduire la valeur de I_3.

Exercice E-3 Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$

Exercice E-4 On considère la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt$

1) Étudier la continuité des fonctions $\left[g : t \mapsto \arccos\sqrt{t}\right]$ et $\left[h : t \mapsto \arcsin\sqrt{t}\right]$

2) Justifier alors la définition et la dérivabilité de F sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
On pourra introduire des primitives G et H bien choisies de g et h

3) En déduire que : $\forall x \in I,\quad F'(x) = 2\cos x \sin x\Big(\arcsin|\sin x| - \arccos|\cos x|\Big)$

4) Étudier la périodicité et la parité de F. Proposer un domaine d'étude pour F. Simplifier alors $F'(x)$ sur ce domaine.

5) Préciser $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. Que pouvez-vous finalement conclure ?