Exercices d'applications

EXERCICE A-1 Soit $ABCD$ un carré de centre O et G le barycentre du système $\{(A,1),(B,2)\}$.

Donner les coordonnées des points A, B, C, D, O et G dans : 1) $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
2) $(B, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{AO})$

EXERCICE A-2 Dans le plan orienté, on donne deux repères cartésiens $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(\Omega; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on connaît les coordonnées du point $\Omega(a; b)$ et des vecteurs $\overrightarrow{I}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{J}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

1) Exprimer les coordonnées (x, y) d'un point M du plan dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
en fonction de ses coordonnées $(X; Y)$ dans le repère $(\Omega; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

2) Dans le cas particulier où les deux repères sont orthonormaux directs, montrer qu'on peut exprimer les formules uniquement à l'aide de a, b et de l'angle $\theta = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{I})$

EXERCICE A-3 Dans le plan rapporté à une base orthonormée, déterminer une valeur de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ lorsque

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

EXERCICE A-4 Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct. On donne $A(1,2)$, $B(2,3)$, $C(6,1)$ et $D(3,0)$.
Quelle est l'aire de ABC ? Justifier que ABD est rectangle en A.

EXERCICE A-5 Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère les points $A(-1;1)$, $B(3,-1)$ et $C(1,4)$.

1) Calculer la distance de C à la droite (AB).
2) Préciser les coordonnées du projeté H du point C sur la droite (AB).
3) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H' de ABC.

EXERCICE A-6 *Tangente à un cercle* Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

1) Déterminer la tangente au point $A(1,2)$ du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$
2) Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ et A le point de coordonnées $(1,3)$,
justifier que A est un point extérieur à $\mathcal{C}$ et donner l'équation des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de A

EXERCICE A-7 *Position relative de deux cercles* Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

On donne $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ trois cercles du plan avec :
$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$, $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ et $\mathcal{C}_3 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$
Étudier la position relative de ses trois cercles. En cas de situation de tangence, prciser la tangente commune.

EXERCICE A-8 Déterminer la nature du triangle ABA'
où A' est le symétrique de A par rapport au centre de gravité de ABC
si A a pour affixe $1 + i$, B a pour affixe $1 - i$ et C a pour affixe $4 + 3i$

EXERCICE A-9 On donne A d'affixe 2, B d'affixe $1 - i$ et C d'affixe $1 + i$ dans le plan complexe.
1) Quelle est la nature de ABC ?
2) Γ est le cercle de diamètre $[BC]$ et r est la rotation de centre A qui envoie B sur C.
Si M est un point de Γ et si M' est son image par r, démontrer que C, M et M' sont alignés.

EXERCICE A-10 Quelle est la nature de la transformation du plan complexe qui M d'affixe z associe M' d'affixe z'
où : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$?

Exercices de référence

EXERCICE R-1 Dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$,
on considère l'ensemble E des points de coordonnées $(x; y)$ tels que : $x^2 - xy - 2y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$.

1) Préciser le point A et les points B et C d'intersection de E avec respectivement l'axe $(O; \vec{i})$ et l'axe $(O, \vec{j})$
2) Quelle est l'équation de E dans $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$? En déduire la nature géométrique de E.

EXERCICE R-2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on donne $A(1,1)$, $B(3,7)$ et $C(-1,3)$.

1) Quelle est la nature de ABC ?.
2) Déterminer les équations cartésiennes des côtés du triangle ABC.

On rappelle que la bissectrice de deux droites est définie comme l'ensemble des points équidistants de ces droites

3) Déterminer la bissectrice de (AC) et (BC)
4) Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit à ABC.

EXERCICE R-3 Soit ABC un triangle équilatéral et M un point à l'intérieur du triangle,
prouver que la somme des distances de M aux côtés du triangle ne dépend pas de M.

EXERCICE R-4 Déterminer les lignes de niveaux de la fonction scalaire φ lorsque

1) $\varphi(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ où A et B sont des points distincts connus
(*Indication* Introduire le milieu I de $[AB]$)

2) $\varphi(M) = 2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ où A, B et C sont des points distincts connus
(*Indication* Introduire un barycentre G de A, B et C)

3) $\varphi(M) = 2MA^2 + 3MB^2 - 5MC^2$ où A, B et C sont des points distincts connus
(*Indication* On pourra démontrer que $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$ est un vecteur $\vec{u}$ indépendant de M)

EXERCICE R-5 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on appelle $\mathcal{D}_m$ la droite passant par $A(-1; 0)$
et de coefficient directeur m et $\mathcal{C}$ la courbe dont une équation est $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

1) Quelle est la nature de $\mathcal{C}$? Préciser ses éléments caractéristiques.
2) Préciser selon la valeur de m le nombre de point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_m$.
3) Donner une équation normale des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de A.
4) Si $B\left(\frac{13}{5}, \frac{9}{5}\right)$, justifier que B est un point de $\mathcal{C}$ et donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en B.
5) On donne $C(3, 0)$. Justifier que C est extérieur à $\mathcal{C}$ et préciser les points de contact sur $\mathcal{C}$ des deux tangentes issues de C au cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE R-6 On rappelle que j est le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes
1) j, jz et z soient alignés
2) i, z et iz forment un triangles équilatéral

EXERCICE R-7 Si $z \in \mathbb{C}$, on note M_1 le point d'affixe z, M_2 le point d'affixe z^2 et M_3 le point d'affixe z^3
Trouver l'ensemble des points M_1 tels que $M_1M_2M_3$ soit un triangle rectangle

EXERCICE R-8 Si $ABCD$ est un parallélogramme,
on construit extérieurement à ABCD les triangles équilatéraux BCE et CDF
Déterminer la nature du triangle AEF.

EXERCICE R-9 On donne les points $A(1,0)$, $B(1,1)$, $A'(0,-3)$ et $B'(2,-1)$
Prouver qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$
et présiser les éléments caractéristiques de s.