Exercices d'applications

EXERCICE A-1 On considère une fonction f polynomiale $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{p+1}x^{p+1}x + a_p x^p$ avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$ $(n > p)$

1) Déterminer un équivalent en 0 de $f(x)$.
2) a) Déterminer un équivalent en $\pm\infty$ de $f(x)$.
   b) Justifier alors que, si f est de degré impair, f admet au moins une racine réelle.

EXERCICE A-2 Calculer les limites suivantes à l'aide des équivalents usuels :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}-1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{3x^3+2x^2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{sh}\sqrt{x}\right)^7\ln\left(1+e^{-x}\right)$

EXERCICE A-3 *On pourrait penser que...* Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$,

Pour tout entier n, calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$. En déduire que la fonction f admet un $DL_n(0)$ qu'on précisera.
Pensez-vous que le développement limité caractérise totalement la fonction au voisinage de 0 ?

EXERCICE A-4 *On pourrait penser que...(bis)*
Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$,

Justifier que f admet un $DL_2(0)$. Calculer $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x}$. La fonction f admet-elle une dérivée seconde en 0 ?

EXERCICE A-5 Déterminer le développement limité : z) en -2 à l'ordre 3 de $\dfrac{1}{3+x}$
a) en 0 à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ b) en 2 à l'ordre 3 de $\sqrt{x}$

EXERCICE A-6 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de :
a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x$ en 0 b) $g(x) = e^x\cos x$ en 0 c) $h(x) = \dfrac{(e^\pi - e^x)\sin x}{x^2}$ en $x = \pi$

EXERCICE A-7 Déterminer : a) un $DL_4(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ b) un $DL_3(0)$ de $\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$
c) un $DL_3(0)$ de $g(x) = \sqrt{1+\sin x}$ d) un $DL_3(0)$ de $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+2x+2x^2}{1+2x+3x^2}\right)$

EXERCICE A-8 Déterminer un $DL_8(0)$ de tan à partir de son $DL_5(0)$ par intégration

EXERCICE A-9 1) Prouver que f donnée par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ admet un prolongement continue et dérivable en 0.
f est-elle de classe C^1 en 0 ?
2) Soit (E) une EDL1 dont les solutions sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 sont :
$$\mathcal{S}(I) = \left\{\left[x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x} + C\frac{e^x-1}{x}\right] \mid C \in \mathbb{R}\right\}$$
l'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE A-10 Déterminer un $DL_2(0)$ de $\arccos\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$

EXERCICE A-11 Donner un équivalent en 0 de $f(x) = x(1+\cos x) - 2\tan x$

EXERCICE A-12 Préciser localement la position de la courbe $y = x^{\frac{1}{1+\ln x}}$ par rapport à sa tangente en $x = 1$.

EXERCICE A-13 Rechercher les asymptotes au graphe de la fonction $g(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Exercices de référence

EXERCICE R-1
a) *Lemme :* Soient u et v des applications strictement positives au voisinage de $+\infty$, montrer que

$$\text{si} \quad \lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty \quad \text{et si} \quad \ln(u(x)) = o_{+\infty}\big(\ln(v(x)\big) \quad \text{alors} \quad u(x) = o_{+\infty}(v(x))$$

b) Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions $f(x) = \big(\ln(\ln x)\big)^{x^{\ln x}}$ et $g(x) = (\ln x)^{x^{\ln(\ln x))}}$

EXERCICE R-2 Calculer les limites suivantes à l'aide des équivalents usuels :

$$1) \lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\sqrt{x}+\sin(x)\big)\big(e^x+\arctan(x)\big)}{\sqrt{x}\,\text{ch}(x)} \qquad 2) \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2(2x)} \qquad 3) \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

EXERCICE R-3 Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a,

1) Montrer que : $e^f \sim_a e^g \Leftrightarrow f-g \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Peut-on affirmer $f \sim_a g \Rightarrow e^f \sim_a e^g$?

2) Si f et g sont positives au voisinage de a et si $\alpha \in \mathbb{R}$, peut-on affirmer $f \sim_a g \Rightarrow f^\alpha \sim_a g^\alpha$?

EXERCICE R-4 Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de :

z) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $\qquad u_n = \left(\ln(1+e^{-n^2})\right)^{\frac{1}{n}}$ $\qquad$ b) $v_n = (1-\text{th}\ n)^{\text{th}\ \frac{1}{n}}$ $\qquad$ c) $u_n = \arccos\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan n\right)$

EXERCICE R-5 Déterminer le développement limité : $\qquad$ a) à l'ordre 3 en 1 de $f(x) = e^{-x}\dfrac{1+x}{x}$

b) à l'ordre 7 en 0 de $f(x) = (\sin x - x)\text{sh}\ x$ $\qquad$ c) à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{\ln(1+\tan x)}{1+\sin x}$

EXERCICE R-6 Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2\tan x - x$,

1) Montrer que f admet une fonction réciproque dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui est impaire.

2) On admet que f et f^{-1} sont C^∞ sur leurs domaines de définition. Donner le $DL_6(0)$ de f^{-1}

EXERCICE R-7 Déterminer le développement limité :

a) à l'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{3}$ de $\arctan(2\sin x)$ $\qquad$ b) à l'ordre 13 en 0 de $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{t^4+t^2+1}$

EXERCICE R-8 Trouver un $DL_6(0)$ de th x en remarquant que $\text{th}(x) = \Big(\ln(\text{ch}\ x)\Big)'$

EXERCICE R-9 Donner un équivalent en 0 de $\quad f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)$

EXERCICE R-10 En utilisant des développements asymptotiques, déterminer les valeurs réelles de λ pour que $\Big[f : x \mapsto \text{cotan}^2(x) + \text{cotan}^2(2x) - \lambda\text{cotan}^2(3x)\Big]$ soit prolongeable par continuité en 0 et donner alors $f(0)$

Exercices d'entraînement

EXERCICE E-1 Pour n entier naturel quelconque, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+x)\big)^n\,dx$

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+x}\big(\ln(1+x)\big)^n\,dx$.

b) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le I_n \le 2\dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$.

c) En déduire que I_n est négligeable devant une suite géométrique dont on donnera la raison.

2) a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = 2(\ln 2)^n - nI_{n-1}$

b) Déterminer alors un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE E-2 Pour x réel non nul, on pose $\quad f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$

1) Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ et que le prolongement est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

2) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $\quad f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$

3) Donner un DL à l'ordre 1 de f en 0. En déduire un équivalent de la suite u_n en $+\infty$