Exercices d'application

EXERCICE A-1 Reconnaître les courbes suivantes : 1) $\Gamma = \left\{ M(x,y) \mid x^2 - 4y^2 = 0 \right\}$

2) $\Upsilon = \left\{ M(x,y) \mid y^2 - x = 0 \right\}$ 3) $\Theta_k = \left\{ M(x,y) \mid (x+1)(y+2) = k \right\}$ où $k \in \mathbb{R}$ est fixé

EXERCICE A-2 Déterminer les coordonnées et les paramètres associés à l'unique point double de la courbe paramétrée $f(t) = \left(t + 1 + \dfrac{1}{t-1}, t^2 + 1 + \dfrac{1}{t}\right)$

EXERCICE A-3 Montrer que la courbe paramétrée $f(t) = (3t^3 + 2t^2 - t - 1, 3t^2 + 2t + 1)$ possède un unique point double et déterminer les deux tangentes correspondantes.

EXERCICE A-4 Prouver pour les courbes paramétrées suivantes l'existence d'une tangente au point de paramètre t et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente :

a) $f(t) = \left(t + \dfrac{1}{t-1}, \dfrac{t^2}{4} - t - \dfrac{1}{t-1}\right)$ en $t = 3$ b) $f(t) = (\cos t, \sin^3 t)$ en $t = 0$ c) $f(t) = \left(e^{t-1} - t; t^3 - 3t\right)$ en $t = 1$

EXERCICE A-5 Démontrer que la courbe paramétrée $t \mapsto \left(\sqrt{t^2 + t + 1}, \sqrt{4t^2 + 5t + 1}\right)$ possède une asymptote

au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercices de référence

EXERCICE R-1 Pour chacun des exemples suivants, déterminer le domaine de définition puis le domaine d'étude. Puis finir l'étude de la courbe paramétrée.

a) $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ *Cycloïde* b) $f(t) = \left(a\cos^3 t, a\sin^3 t\right)$ où $a > 0$ *Astroïde*

Exercices d'entraînement

EXERCICE E-1 Étudier la courbe paramétrée $f(t) = \left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t}; -\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{1+t}\right)$

EXERCICE E-2 *D'après E3A PC 2007*

On considère pour tous réels x et y : $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

et, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique soit $\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0 \right\}$

1) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $D_t = \left\{ (x, tx),\ x \in \mathbb{R} \right\}$, déterminer l'intersection $D_t \cap \Gamma$.

2) Pour $t \in \mathbb{R},\ t \neq -1$, on note $\alpha(t) = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $\beta(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ et $\varphi(t) = \left(\alpha(t), \beta(t)\right)$

a) Représenter le support Φ de cette courbe paramétrée appelé *Folium de Descarte.*

b) Comparer Γ avec $\Phi = \left\{ \varphi(t),\ t \in \mathbb{R} - \{1\} \right\}$: on précisera si l'on a une inclusion ou une égalité.

3) Donner une représentation polaire de la courbe Γ.

Le sujet commet l'abus de notations usuels d'usage pour les courbes paramétrées où $\mathbb{R}^2$ est assimilé au plan (géométrique) : les notions de points (géométrique), de coordonnées ou de vecteur ne sont pas différentiés (le point M n'est pas différentié de ses coordonnées (x,y) ni du vecteurs $\overrightarrow{OM}$) En particulier, $\varphi(t)$ représente,selon le contexte, un point M_t, des coordonnées $\left(x(t), y(t)\right)$ ou un vecteur $\overrightarrow{OM_t}$

EXERCICE E-3 *D'après ENSTIM 2006*

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit.

Barème indicatif : 10 points pour chaque problème

Problème 1 : Analyse

Dans tout le problème, on adopte la notation $\ell n^k(x)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$) comme écriture simplifiée du nombre réel $(\ell n\,(x))^k$ et par convention, on pose : $\ell n^0(x) = 1$ (y compris si $x = 1$).

Partie 1 : étude d'un arc paramétré

Pour tout nombre réel strictement positif t, on pose : $x(t) = t.\ell n^3(t)$ et $y(t) = t.\ell n^2(t)$.
On pose également $x(0) = y(0) = \lambda \in \mathbb{R}$.
On souhaite étudier l'arc paramétré $f : t \mapsto (x(t), y(t))$.
Le plan usuel de la géométrie est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$ lorsque t décrit $\mathbb{R}^+$.

1) Pour quelle valeur de λ les fonctions x et y sont-elles continues en 0 ?
On suppose dans la suite que λ prend cette valeur.
2) Déterminer, sur $]0, +\infty[$, les fonctions dérivées x' et y' puis étudier leur signe.
3) Donner dans un même tableau les variations des deux fonctions x et y.
Dans ce tableau devront figurer les limites aux bornes, ainsi que les valeurs de x et y aux points particuliers.
Ces valeurs seront données sous l'une des trois formes suivantes : n, $\dfrac{n}{e^2}$ ou bien $\dfrac{n}{e^3}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
4) Montrer que, lorsque le nombre réel u est au voisinage du nombre 0, on a :

$$x(1+u) \sim u^3 \qquad y(1+u) = u^2 + o\left(u^3\right)$$

En déduire que l'unique point singulier de l'arc, obtenu pour le paramètre $t = t_0$ à déterminer, est un point de rebroussement dont on précisera la nature. Représenter sur un schéma, sans étude supplémentaire, l'allure de $\mathcal{C}$ lorsque t est au voisinage de t_0, en mettant en évidence la tangente au point singulier.
5) Déterminer les limites lorsque t tend vers $+\infty$ puis vers 0 (à droite) de la fonction $t \mapsto \dfrac{y(t)}{x(t)}$.
Conclure quant à la nature de la branche infinie de l'arc ainsi que sur l'existence d'une demi-tangente à l'arc au point de paramètre $t = 0$.
6)a) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = x$.
6)b) Tracer $\mathcal{C}$, en prenant pour unité graphique 4 cm.
On donne les valeurs approchées suivantes (à 0,01 près) : $e^{-2} \simeq 0,14$ *et* $e^{-3} \simeq 0,05$