Exercice sur le vocabulaire des ensembles et des applications

EXERCICE $n°$ 1 Si A, B et C sont des parties d'un ensemble quelconque E, démontrer que

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
4) $(A \cap B \subset A \cap C)$ et $(A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$
5) $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ B \cup C = B \cap A \\ C \cup A = C \cap B \end{cases} \Rightarrow \quad A = B = C$

EXERCICE $n°$ 2 Les applications suivantes sont-elles surjectives ? injectives ? bijectives ? et, dans ce cas, préciser f^{-1}.

f, s_Δ, G (définies dans le cours) , $\left[\begin{array}{rcl} \theta : \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array}\right]$ (où $E(x)$ est la partie entière de x)

$[x \mapsto x^2]$ de E dans F pour : a) $E = [-1, 1]$, $F = \mathbb{R}$, b) $E = [-1, 1]$, $F = [0, 1]$, c) $E = F = [0, 1]$

EXERCICE $n°$ 3 Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont des applications, montrer que :

1) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective. Etudier la réciproque.
2) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective. Etudier la réciproque.
3) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective. Préciser $(g \circ f)^{-1}$.
4) $E = G$ et $\begin{cases} f \circ g = id_F \\ g \circ f = id_E \end{cases}$ si et seulement si f et g sont des bijections réciproques

Les résultats de cet exercice théorique sont à connaître et peuvent être utilisés sans être redémontrés

---

Exercice sur le vocabulaire des ensembles et des applications

EXERCICE $n°$ 1 Si A, B et C sont des parties d'un ensemble quelconque E, démontrer que

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
4) $(A \cap B \subset A \cap C)$ et $(A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$
5) $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ B \cup C = B \cap A \\ C \cup A = C \cap B \end{cases} \Rightarrow \quad A = B = C$

EXERCICE $n°$ 2 Les applications suivantes sont-elles surjectives ? injectives ? bijectives ? et, dans ce cas, préciser f^{-1}.

f, s_Δ, G (définies dans le cours) , $\left[\begin{array}{rcl} \theta : \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array}\right]$ (où $E(x)$ est la partie entière de x)

$[x \mapsto x^2]$ de E dans F pour : a) $E = [-1, 1]$, $F = \mathbb{R}$, b) $E = [-1, 1]$, $F = [0, 1]$, c) $E = F = [0, 1]$

EXERCICE $n°$ 3 Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont des applications, montrer que :

1) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective. Etudier la réciproque.
2) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective. Etudier la réciproque.
3) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective. Préciser $(g \circ f)^{-1}$.
4) $E = G$ et $\begin{cases} f \circ g = id_F \\ g \circ f = id_E \end{cases}$ si et seulement si f et g sont des bijections réciproques

Les résultats de cet exercice théorique sont à connaître et peuvent être utilisés sans être redémontrés