Un peu de calcul...

Exercice n°1 Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z lorsque $z = (2i-3)e^{(4+3i)x}$ où $x \in \mathbb{R}$

Exercice n°2 y étant la fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ donnée par l'expression ci-dessous.
Calculer les dérivées premières et secondes de y :

1) $y(x) = (2x^3 - 2x^2 + 1)e^{-x}$ 2) $y(x) = (-3x^2 + 2x)e^{ix}$ 3) $y(x) = (ax^3 - bx)e^{-ix}$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$

Exercice n°3 Donner l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ de

1) $y'' + 4y = \sin(2x)$ 2) $8y'' + 10y' + 3y = 6x + 23 + e^{-\frac{x}{2}}$ 3) $4y'' + 12y' + 9y = e^{\frac{3x}{2}}$

Solutions

Exercice n°1 $z = (2i-3)e^{4x}e^{3ix}$ or $e^{4x} \in \mathbb{R}$

donc $\Re e(z) = e^{4x}\Re e\Big((2i-3)e^{3ix}\Big) = e^{4x} \times \Big(-2\sin(3x) - 3\cos(3x)\Big) = -e^{4x}\Big(2\sin(3x) + 3\cos(3x)\Big)$

$\Im m(z) = e^{4x}\Im m\Big((2i-3)e^{3ix}\Big) = e^{4x} \times \Big(2\cos(3x) - 3\sin(3x)\Big)$

Exercice n°2

1) $y'(x) = (-2x^3 + 8x^2 - 4x - 1)e^{-x}$ et $y''(x) = (2x^3 - 14x^2 + 20x - 3)e^{-x}$
2) $y'(x) = (-3ix^2 + (2i-6)x + 2)e^{ix}$ et $y''(x) = (3x^2 + (-2-12i)x + (4i-6))e^{ix}$
3) $y'(x) = (-iax^3 + 3ax^2 + ibx - b)e^{-ix}$ et $y''(x) = (-ax^3 - 6iax^2 + (6a+b)x + 2ib)e^{-ix}$

Exercice n°3

1) Équation caractéristique : $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2i)(r+2i) = 0$

Solutions homogènes complexes : $S_H(\mathbb{C}) = \{\lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$

Solutions homogènes réelles : $S_H(\mathbb{R}) = \{A\cos(2x) + B\sin(2x) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$

Solution particulière :

$\sin(2x) = \Im m(e^{2ix})$ donc une solution particulière est $y = \Im m(z)$ où z est solution de $z'' + 4z = e^{2ix}$

$2i$ est racine simple de l'équation caractéristique donc on recherche z sous la forme : $z(x) = axe^{2ix}$ où $a \in \mathbb{C}$

$z(x) = axe^{2ix}$ $(\times 4)$, $z'(x) = (2iax + a)e^{2ix}$ $(\times 0)$, $z''(x) = (-4ax + 4ia)e^{2ix}$ $(\times 1)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x) + 4z(x) = e^{2ix} \Leftrightarrow 4ia = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{i}{4}$ aussi $y(x) = \Im m\left(-\frac{i}{4}xe^{2ix}\right) = -\frac{x}{4}\cos(2x)$

2) Équation caractéristique :

$8r^2 + 10r + 3 = 0$ de discriminant $\Delta = 100 - 4 \times 8 \times 3 = 4$ donc de racines $\frac{-10+2}{16} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$

Solutions homogènes complexes : $S_H(\mathbb{C}) = \{\lambda e^{-i\frac{x}{2}} + \mu e^{-i\frac{3x}{4}} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$

Solutions homogènes réelles : $S_H(\mathbb{R}) = \{\lambda e^{-i\frac{x}{2}} + \mu e^{-i\frac{3x}{4}} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Solution particulière :

On utilise une superposition des solutions : (E_1) : $8y'' + 10y' + 3y = 6x + 23$ et (E_2) : $8y'' + 10y' + 3y = e^{-\frac{x}{2}}$

Pour (E_1) : on cherche une solution y_1 de la forme $y_1(x) = ax + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

y_1 solution de (E_1) sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 10a + 3(ax+b) = 6x + 23 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ 10a + 3b = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ soit $y_1(x) = 2x + 1$

Pour (E_2) : on cherche une solution y_2 de la forme $y_2(x) = axe^{-\frac{x}{2}}$ (car $-\frac{1}{2}$ est racine simple de l'équation caractéristique)

$y_2(x) = axe^{-\frac{x}{2}}$ $(\times 3)$, $y_2'(x) = (-\frac{a}{2}x + a)e^{-\frac{x}{2}}$ $(\times 10)$, $y_2''(x) = (\frac{a}{4}x - a)e^{-\frac{x}{2}}$ $(\times 8)$

y_2 solution de (E_2) sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ soit $y_2(x) = \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

Finalement, une solution particulière est $\left[x \mapsto 2x + 1 + \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right]$

3) Équation caractéristique :

$4r^2 + 12r + 9 = 0$ de discriminant $\Delta = 144 - 4 \times 4 \times 9 = 0$ donc une racine double $\frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$

Solutions homogènes complexes : $S_H(\mathbb{C}) = \{(\lambda x + \mu)e^{-\frac{3x}{2}} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$

Solutions homogènes réelles : $S_H(\mathbb{C}) = \{(\lambda x + \mu)e^{-\frac{3x}{2}} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Solution particulière : on cherche une solution y de la forme $y(x) = ax^2e^{-\frac{3x}{2}}$ ($\frac{3}{2}$ est racine double de l'équation caractéristique)

$y(x) = ax^2e^{-\frac{3x}{2}}$ $(\times 9)$, $y(x) = (-\frac{3a}{2}x^2 + 2ax)e^{-\frac{3x}{2}}$ $(\times 12)$, $y_2''(x) = (\frac{9a}{4}x^2 - 6ax + 2a)e^{\frac{3x}{2}}$ $(\times 4)$

y solution de l'équation sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow 8a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$ d'où $y(x) = \frac{x^2}{8}e^{-\frac{3x}{2}}$