

• **Cours :**

CHAP VIII : COMPARAISON LOCALE DES FONCTIONS-DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

I) Relations de comparaison entre les fonctions

I.1) Fonction dominée ou fonction négligeable devant une autre, notation O et o

I.2) Equivalence entre deux fonctions, notation $\sim$

Les élèves doivent pouvoir utiliser les équivalents usuels pour calculer des limites :

- directement (ou plus ou moins directement) à l'aide d'équivalents usuels (polynômes en $\pm\infty$ ou en 0 et voir liste page 2 du cours)
- en utilisant $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g)$ et les propriétés des o et des équivalents :

Pour o : transitivité, somme, produit, changement de variables (ou composition à l'intérieur), $f = o_a(1) \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$,

Pour $\sim$: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \sim_a \ell$, transitivité, produit, quotient et composition à l'intérieur.

Attention! En ce qui concerne le changement de variables, l'hypothèse $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} a$ doit clairement être formulée :

$$f(u) \sim_a g(u) \quad \text{et} \quad u = h(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} a \quad \text{alors} \quad f \circ h(x) \sim_b g \circ h(x)$$

Attention! $f(x) \sim_a 0$ ne veut rien dire! **Attention!** Pas d'additions et pas de composition à l'extérieur!

Les élèves doivent pouvoir donner des contre-exemples :

$$\text{addition : } \begin{cases} f \sim_a \varphi \\ g \sim_a \psi \end{cases} \not\Rightarrow f + g \sim_a \varphi + \psi \quad \text{composition externe : } f \sim_a g \not\Rightarrow h \circ f \sim_a h \circ g$$

(cas de $h = \ln$ ou $\exp$ en particulier)

La seule composition externe autorisée sans justification est $f \sim_a g > 0 \Rightarrow f^\alpha \sim_a g^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

II) Notion de développement limité

II.1) Développement limité au voisinage de 0 Définition. Unicité du DL. DL de fonctions paires, impaires.

Développement limité en a : on pose $x = a + h$ et on cherche un DL de $f(a + h)$ en 0.

II.2) Formule de Taylor-Young et développements usuels **Attention!** La formule de Young n'est qu'une implication.

En particulier : f admet un DL2(a) n'entraîne pas l'existence de $f''(a)$ (cf exercice A-4)!

II.3) Opérations sur les développements limités

- Somme et produit
- Changement de variables : e^{x^2} en 0, $\sqrt{2+x}$ en 0
- DL de $\frac{1}{1-u(x)}$ avec $u(x) \rightarrow 0$
- Cas de $\frac{1}{f}$ où $f(0) \neq 0$ et de $\frac{f}{g}$ avec $g(0) \neq 0$ (éventuellement prolongées en 0)

Exemples de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ Le DL est à connaître à l'ordre 3!

Attention, aucun théorème n'est exigible pour $f \circ g$ en général!

Des compositions simples de DL ou des quotients $\frac{f}{g}$ avec $g(0) = 0$ ont été néanmoins traitées mais seulement en exercice.

- Intégration des DL et applications usuelles.
- Mise en garde sur la dérivabilité (Identification possible lorsque Taylor-Young s'applique cf. ex A-9)

III) Application à l'étude locale des courbes

III.0) Prouver qu'un prolongement en a est dérivable Lien entre DL et régularité (Cas des DL_0 et des DL_1)

f a un $DL_1(a)$ donné par $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o(x - a)$ si et seulement si

f est prolongeable par continuité en a avec $f(a) = a_0$ et le prolongement est dérivable en a avec $f'(a) = a_1$.

Application : méthode pour démontrer qu'une fonction admet un prolongement C^1 en a

Recollement des solutions d'une équation différentielle.

III.1) Recherche d'équivalent et calcul de limite. Utilisation de DL pour déterminer un équivalent.

• **Exercices :** (Liste des exercices qui ont été traités en classe)

CHAPITRE VIII Ex A-1 à A-11 sauf A8, R-1 à R-5

La question de cours peut porter sur une définition ou un résultat dont l'élève doit pouvoir donner un énoncé précis qu'il doit pouvoir illustrer d'exemples, de contre-exemples, de schémas, etc...

Il pourra aussi répondre à des questions permettant à l'enseignant de s'assurer de la compréhension de la notion.

La question de cours peut aussi être un exercice simple, proche des exercices d'application du cours.

La question de cours ne doit pas dépasser 20 mn et pourra ne pas être terminée si l'élève ne connaît pas son cours.

Un cours non su entraînera systématiquement une note inférieure à 10! (voire une exclusion de khôlle)

N'oubliez pas de rendre votre compte-rendu de khôlle avant la fin de la semaine 18.