PTSI : Correction des TD du chapitre V

Semaine 8-9

<u>Exercice A-2</u> *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ $\quad 3^{2x} - 34 \times 15^{x-1} + 5^{2x} = 0 \quad (E)$

Vous aviez peut être commencé à écrire : $(E) \Leftrightarrow e^{2x\ln 3} - 34e^{(x-1)\ln 15} + e^{2x\ln 5} = 0 \Leftrightarrow e^{2x\ln 3} - 34e^{(x-1)\ln 3 + (x-1)\ln 5} + e^{2x\ln 5}$
L'ennui, c'est qu'on a des "sommes" d'exponentielles...or exp *se comporte bien avec des produits et pas trop bien avec les sommes...*
On peut bien essayer de factoriser...peut être par $e^{2x\ln 5}$ *(ou* $e^{2x\ln 3}$*)... ce qui revient en fait par diviser par* 5^{2x} *(ou* 3^{2x}*)...comme ci-dessous !*

$$
\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow 3^{2x} - 34 \times (3\times 5)^{x-1} + 5^{2x} = 0 \\
&\Leftrightarrow 3^{2x} - \tfrac{34}{15} \times (3\times 5)^{x} + 5^{2x} = 0 \qquad \text{car } (3\times 5)^{-1} = \tfrac{1}{15} \\
&\Leftrightarrow \frac{3^{2x}}{5^{2x}} - \frac{34}{15} \times \frac{3^x 5^x}{5^{2x}} + 1 = 0 \qquad \text{en divisant par } 5^{2x} > 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - \frac{34}{15} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{x} + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{x}\right)^2 - \frac{34}{15} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{x} + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x} \text{ est une solution de l'équation } X^2 - \frac{34}{15}X + 1 = 0
\end{aligned}
$$

On résout l'équation
$X^2 - \dfrac{34}{15}X + 1 = 0 \Leftrightarrow 15X^2 - 34X + 15 = 0$
Son discriminant est :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (34)^2 - 4 \times 15^2 \\
&= (2\times 17)^2 - (2\times 15)^2 \\
&= 2^2 \times (289 - 225) \\
&= 2^2 \times 64 = (2\times 8)^2 = 16^2
\end{aligned}
$$

Ses racines sont donc :
$$X = \frac{34-16}{2\times 15} = \frac{18}{2\times 15} = \frac{3}{5}$$
$$\text{ou} \quad X = \frac{34+16}{2\times 15} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$
et par conséquent :

$$(E) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5} \text{ ou } \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow e^{x\ln\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \text{ ou } e^{x\ln\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x\ln\frac{3}{5} = \ln\frac{3}{5} \text{ ou } x\ln\frac{3}{5} = \ln\frac{5}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } \quad 3^{2x} - 34\times 15^{x-1} + 5^{2x} = 0 \quad (E) \quad \text{est donc} \quad \{-1, 1\}}$$

<u>Exercice R-2</u> Démontrer que : $\forall x \in]0,1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$

On a : $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x\ln x}e^{(1-x)\ln(1-x)} \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)} \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\ln x + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln 2$
Aussi, on introduit la fonction f définie par $f(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$ et on montre qu'elle est minorée par $-\ln 2$ sur $]0,1[$. f est clairement définie, continue et dérivable sur $]0,1[$ puisque $x > 0$ et $1 - x > 0$ sur $]0,1[$ et :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = \ln x + x \times \tfrac{1}{x} - \ln(1-x) + (1-x)\tfrac{-1}{1-x} = \ln\left(\tfrac{x}{1-x}\right)$$

Aussi, sur $]0,1[$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} > 1 \Leftrightarrow x > 1 - x \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-\ln 2$	$\nearrow$	

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{\ln\frac{1}{2}}{2} + \tfrac{\ln\frac{1}{2}}{2} = \ln\tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

La fonction f est donc bien minorée par $-\ln 2$ sur $]0,1[$ aussi :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) \geqslant -\ln 2 \Leftrightarrow \boxed{\forall x \in]0,1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}}$$

<u>Exercice R-4</u> *Étude de la fonction f définie par :* $f(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$

• <u>*Domaine de définition, domaine d'étude*</u>

Notons D_f l'ensemble de définition de f, on sait que arcsin est définie sur $[-1,1]$ aussi :
$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \le 2x^2 - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2x^2 \le 2 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$ et donc $\boxed{f \text{ est définie sur } D_f = [-1,1]}$
$D_f = [-1,1]$ est un domaine réel symétrique par rapport à 0 et : $\forall x \in [-1,1], \ f(-x) = \arcsin(2(-x)^2 - 1) = \arcsin(2x^2 - 1) = f(x)$
f est donc paire et il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0,1]$: $\boxed{\text{le domaine d'étude de la fonction } f \text{ est } [0,1]}$

• <u>*Régularité*</u> $\forall x \in [0,1], \quad 2x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad$ et $\quad 2x^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Aussi : $\forall x \in [0,1], \quad 2x^2 - 1 \in [-1,1] \quad$ et $\quad \forall x \in]0,1[, \quad 2x^2 - 1 \in]-1,1[$
La fonction $[x \mapsto 2x^2 - 1]$ est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[-1,1]$ où arcsin est continue, dérivable sur $]0,1[$ à valeurs dans $[-1,1]$ où arcsin est dérivable donc, par composition, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } [0,1] \text{ et est dérivable sur }]0,1[}$

et : $\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = 4x \times \Big(\arcsin\Big)'(2x^2-1) = 4x \times \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = \dfrac{4x}{\sqrt{-4x^4+4x^2}} = \dfrac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}}$ car $2x > 0$

donc, finalement, $\boxed{\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}$ aussi $\forall x \in]0,1[,\ f'(x) > 0$ <u>la fonction f est croissante sur $]0,1[$</u>

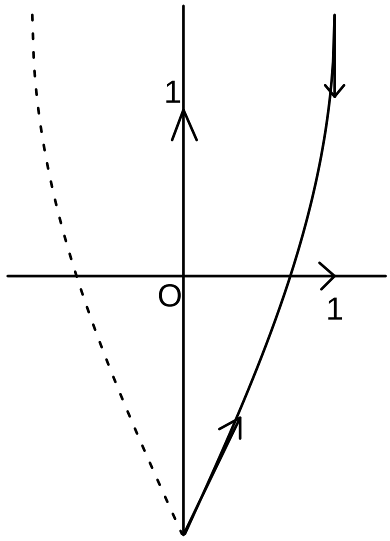
• *<u>Dérivabilité en 0 et en 1</u>*

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = +\infty$ donc, d'aprés le théorème de prolongement d'une dérivée,

on sait que $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et } {f'}_d(0) = 2}$ et que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 1}$

$\boxed{\text{mais la courbe représentative de } f \text{ possède au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale}}$

$\boxed{\text{et elle possède au point d'abscisse 0 une demi-tangente de pente 2 à droite}}$



Attention ! Par parité, on obtient qu'elle possède au point d'abscisse 0 une demi-tangente de pente -2 à gauche aussi f est dérivable à gauche en 0 avec ${f'}_g(0) = -2$ de sorte que f n'est pas dérivable en 0 car ${f'}_g(0) \neq {f'}_d(0)$

• Le tableau de variations de f est :

x	0		1
$f'(x)$	2	$+$	$+\infty$ ‖
f	$-\pi/2$	$\nearrow$	$\pi/2$

On peut rechercher les points d'intersections de la courbe avec l'axe des abcsisses

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \arcsin(2x^2-1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

• On remarque que : $\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = \big(2\arcsin\big)'(x)$

autrement dit il existe une constante réelle k telle que : $\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = 2\arcsin(x) + k$

Les 2 membres de l'égalité définissent des fonctions continues sur $[0,1]$, aussi : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) = 2\arcsin(x) + k$

On peut déterminer k en évaluant en 0 : $f(0) = \arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2} = k$

En utilisant la parité de f, on a : $\forall x \in [-1,0], \quad f(x) = f(-x) = 2\arcsin(-x) - \frac{\pi}{2}$ car $-x \in [0,1]$

Finalement, on a donc démontré que : $\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = 2\arcsin\Big(|x|\Big) - \dfrac{\pi}{2}}$

<u>Remarque :</u> On peut alors étudier la dérivabilité de f en 1 et 0 par les taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\Big(2\arcsin\left(|x|\right) - \frac{\pi}{2}\Big) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{x} = \frac{2\arcsin|x|}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \begin{cases} 2 & \text{en } 0^+ \\ -2 & \text{en } 0^- \end{cases}$$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\Big(2\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{\pi}{2}}{x-1} = \frac{2\arcsin(x) - \pi}{x-1} = 2\underbrace{\frac{\arcsin(x) - \arcsin(1)}{x-1}}_{\xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty} \quad \text{car arcsin n'est pas dérivable en 1}$$

• Dès le départ, en remarquant que $2x^2 - 1$ rappelle la formule de trigonométrie $2\cos^2\theta - 1$, on peut écrire $x = \cos\theta$ à condition que x est bien dans $[-1,1]$...Or, on a remarqué que f est définie sur $[-1,1]$ et qu'elle est paire.
Il s'agit donc de simplifier f pour $x \in [0,1]$ mais alors : $x = \cos(\arccos x) = \cos\theta$ où $\theta = \arccos x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Pour $x \in [0,1]$: $f(x) = \arcsin(2\cos^2\theta - 1) = \arcsin\Big(\cos(2\theta)\Big) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\Big(\cos(2\theta)\Big)$

Or $2\theta \in [0,\pi]$ donc $\arccos\Big(\cos(2\theta)\Big) = 2\theta$ et $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - 2\theta = \dfrac{\pi}{2} - 2\arccos(x)$

Par parité, pour $x \in [-1,0]$, on a : $f(x) = f(-x) = \dfrac{\pi}{2} - 2\arccos(-x)$

et donc $\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \dfrac{\pi}{2} - 2\arccos\left(|x|\right)} = \dfrac{\pi}{2} - 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\left(|x|\right)\right) = 2\arcsin\Big(|x|\Big) - \dfrac{\pi}{2}$

Exercice A-8

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+(\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \underbrace{\sqrt{3}}_{v'(x)} \times \underbrace{\frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2}}_{u'\circ v(x)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\underbrace{\arctan(\sqrt{3}x)}_{u\circ v(x)}\Big]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\arctan\sqrt{3} - \arctan 0\Big) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{2x}_{v'(x)} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}}_{u'\circ v(x)}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\arcsin(x^2)}_{=u'\circ v(x)}\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{12}$