PTSI : Correction des TD du chapitre V

Séance du 17/11/2011

<u>Exercice R-5</u> Démontrons que $\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}$

On a : $\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{16}{65}$

et, pour prouver cette seconde égalité, on va montrer que les réels $A=\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}$ et $B=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{16}{65}$

- ont le même sinus
- sont situés dans le même intervalle I d'amplitude π où la restriction de sin réalise une bijection
  type $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ou $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, etc c'est à dire un intervalle sur lequel sin est continue, strictement monotone donc bijective...

alors, par bijectivité de sinus en restriction à I (et en fait, surtout par injectivité), on a : $\begin{cases}\sin(A)=\sin(B)\\(A,B)\in I^2\end{cases} \Rightarrow A=B$

• On calcule donc le sinus de ces deux réels :

$$\begin{aligned}\sin(A) &= \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\times\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\times\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right) \qquad \text{or}\quad \forall t\in[-1,1],\quad \sin(\arcsin t)=t\\ &= \frac{4}{5}\times\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13}\end{aligned}$$

Mais : $\forall t\in[-1,1],\quad \cos(\arcsin t)=\big|\cos(\arcsin t)\big|=\sqrt{\cos^2(\arcsin t)}=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin t)}=\sqrt{1-t^2}$

car $\cos(\arcsin t)\geq 0$ puisque $\arcsin t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Aussi :
$$\begin{aligned}\sin(A) &= \frac{4}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\times\frac{5}{13}\\ &= \frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{169-25}}{13}+\frac{\sqrt{25-16}}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{48+15}{5\times 13}=\frac{63}{65}\end{aligned}$$

De même : $\sin(B)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{16}{65}\right)=\cos\left(\arcsin\dfrac{16}{65}\right)=\sqrt{1-\left(\arcsin\dfrac{16}{65}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{65^2-16^2}}{65}$

or (quitte à poser l'opération éventuellement) on a : $65^2-16^2=(65-16)(65+16)=49\times 81=(7\times 9)^2=63^2$

On a donc prouvé que $\sin(A)=\sin(B)=\frac{63}{65}$

• Donnons un encadrement satisfaisant de A et B :

$\arcsin\dfrac{16}{65}\in\left]0,\dfrac{\pi}{6}\right[$ car $\begin{cases}0<\frac{16}{65}<\frac{1}{2}=\arcsin\frac{\pi}{6}\\ \text{arcsin est strictement croissante sur } [-1,1]\end{cases}$ aussi $B=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{16}{65}\in\left]\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right[$

$$\left\{\begin{array}{l}\arcsin\dfrac{4}{5}\in\left]0,\dfrac{\pi}{4}\right[\quad \text{car}\quad 0<\underbrace{\dfrac{4}{5}}_{=0,8}<\underbrace{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\simeq\frac{1,7}{2}}\\ \qquad\qquad \text{et parce que arcsin est strictement croissante sur } [-1,1]\\ \arcsin\dfrac{5}{13}\in\left]0,\dfrac{\pi}{6}\right[\quad \text{car}\quad 0<\dfrac{5}{13}<\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \quad \text{donc}\quad A=\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}\in\left]0,\frac{5\pi}{12}\right[$$

Ainsi : $A\in I$ et $B\in I$ où $I=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\sin A=\sin B$ donc $A=B$ car sinus réalise une bijection de I dans $[-1,1]$

On a donc démontré que $A=B$ ou autrement dit que $\boxed{\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}}$

<u>Remarques</u> : On pouvait aussi conclure par $(A,B)\in[0,\pi]^2$ puisque $\arcsin a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ si $a\in]0,1[$
et $\cos A=\cos B$ ce qu'on peut vérifier par un calcul analogue...

EXERCICE R-8 On considère l'équation différentielle $(1+x^2)y'+xy=b(x) \quad (E)$

1) *Résolution de l'équation homogène* On résout cette équation sur $\mathbb{R}$

L'équation homogène est : $(H) :\ (1+x^2)y'+xy=0 \ \Leftrightarrow\ y+\dfrac{x}{1+x^2}y=0$ car $1+x^2\neq 0$

$\left[a : x\mapsto \dfrac{x}{1+x^2}\right]$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives et : $a(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{1+x^2}=\left(\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)'$

Les solutions homogènes de l'équation forment donc l'ensemble :

$$\mathcal{S}_H=\left\{\left[x\mapsto C\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\right]\ \Big|\ C\in\mathbb{R}\right\} \quad \text{autrement dit} \quad \boxed{\mathcal{S}_H=\left\{\left[x\mapsto \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}\right]\ \Big|\ C\in\mathbb{R}\right\}}$$

Pour résoudre (E) sur I, il reste à trouver une solution particulière :

On utilise la méthode de variation de la constante : on cherche la solution sous la forme $\left[y_0 : x\mapsto C(x)h(x)\right]$

où $\left[h : x\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]$ est une solution homogène et C une fonction dérivable sur I

y_0 est solution de (E) sur I $\Leftrightarrow$ $\forall x\in I,\quad (1+x^2)\times C'(x)h(x)+\underbrace{(1+x^2)\times C(x)h'(x)+xC(x)h(x)}_{=0 \text{ car } h \text{ solution de (H)}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Leftrightarrow\quad \forall x\in I,\quad C'(x)=b(x)\times\sqrt{1+x^2}\times\dfrac{1}{1+x^2}$ puisque $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2) *Cas du second membre $b(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $I=\mathbb{R}$* alors on a : $\forall x\in\mathbb{R},\quad C'(x)=1\times\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+x^2}=\arctan'(x)$

Aussi : $\left[y_0 : x\mapsto \dfrac{\arctan(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right]$ est une solution particulière de (E)

et l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\left[x\mapsto \dfrac{C+\arctan(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right]\ \Big|\ C\in\mathbb{R}\right\}}$

3) *Cas du second membre $b(x)=1$ et $I=\mathbb{R}$* alors on a : $\forall x\in\mathbb{R},\quad C'(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{argsh}'(x)$

Aussi : $\left[y_0 : x\mapsto \dfrac{\operatorname{argsh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right]$ est une solution particulière de (E)

et l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\left[x\mapsto \dfrac{C+\operatorname{argsh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right]\ \Big|\ C\in\mathbb{R}\right\}}$

4) *Cas du second membre $b(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$ et $I=]-\infty,-1[$ ou $I=]-1,1[$ ou $I=]1,+\infty[$*

alors on a : $\forall x\in I,\quad C'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\times\sqrt{1+x^2}\times\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x}{\sqrt{|1-x^2|}\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{|1-x^2|(1+x^2)}}$

- Si $I=I_2=]-1,1[$ alors $1-x^2>0$

  aussi on a : $\forall x\in I,\quad C'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}=\left(\dfrac{1}{2}\arcsin(x^2)\right)'$

  Une solution particulière de (E) est $\left[y_0 : x\mapsto \dfrac{\arcsin\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}}\right]$

  et l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1,1[$ est : $\boxed{\mathcal{S}_2=\left\{\left[x\mapsto \dfrac{C+\arcsin\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}}\right]\ \Big|\ C\in\mathbb{R}\right\}}$

- Si $I=I_1=]-\infty,-1[$ ou $I=I_3=]1,+\infty[$ alors $1-x^2<0$

  aussi on a : $\forall x\in I,\quad C'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)(1+x^2)}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^4-1}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{\sqrt{(x^2)^2-1}}=\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{argch}(x^2)\right)'$

  Une solution particulière de (E) est $\left[y_0 : x\mapsto \dfrac{\operatorname{argch}\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}}\right]$

  et l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$ est : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\left[x\mapsto \dfrac{C+\operatorname{argch}\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}}\right]\ \Big|\ C\in\mathbb{R}\right\}}$

- Existe-t-il une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, solution de (E) sur I_1, I_2 et I_3 de (E) dans ce cas ?

  D'après ce qui précède, on sait que nécessairement :

  - il existe un réel C_1 tel que : $\forall x < -1, \quad f(x) = \dfrac{C_1 + \operatorname{argch}\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}}$
  - il existe un réel C_2 tel que : $\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \dfrac{C_2 + \arcsin\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}}$
  - il existe un réel C_3 tel que : $\forall x > 1, \quad f(x) = \dfrac{C_3 + \operatorname{argch}\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}}$

  On sait aussi que f doit être continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en -1 et en 1 aussi :

  - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ Or : $\dfrac{C_1 + \operatorname{argch}\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow[x\to -1]{} \dfrac{C_1}{2\sqrt{2}}$ et $\dfrac{C_2 + \arcsin\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow[x\to -1]{} \dfrac{C_2 + \frac{\pi}{2}}{2\sqrt{2}}$

    par continuité de argch et arcsin en 1 et puisque $\operatorname{argch}(1) = 0$ et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

    on a donc nécéssairement : $C_1 = C_2 + \frac{\pi}{2}$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ Or : $\dfrac{C_3 + \operatorname{argch}\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow[x\to 1^+]{} \dfrac{C_3}{2\sqrt{2}}$ et $\dfrac{C_2 + \arcsin\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{C_2 + \frac{\pi}{2}}{2\sqrt{2}}$

    on a donc nécéssairement : $C_3 = C_2 + \frac{\pi}{2}$

> Finalement, il y a une infinité de fonctions continue sur $\mathbb{R}$ solution de (E) sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$
>
> il s'agit des fonctions $\left[x \mapsto \begin{cases} \frac{C+\arcsin\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}} & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{C-\frac{\pi}{4}+\operatorname{argch}\left(x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}\right]$ où C est une constante réelle quelconque

5) <u>*Cas du second membre* $b(x) = \dfrac{1}{1-x}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{|x|}}$ *et* $I =]-\infty,0[$ *ou* $I =]0,+\infty[$</u>

aussi on a : $\forall x \in I, \quad C'(x) = \dfrac{1}{1-x}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{|x|}} \times \sqrt{1+x^2} \times \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}(1-x)}$

- <u>Si $I =]0,1[$</u> alors $x > 0$

  et donc : $\forall x \in I, \quad C'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-x)} = 2 \times \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\left(\sqrt{x}\right)^2} = \left(2\operatorname{argth}\left(\sqrt{x}\right)\right)'$

  Une solution particulière de (E) sur $]0;1[$ est $\left[y_0 : x \mapsto \dfrac{2\operatorname{argth}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\right]$

  et l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,1[$ est : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left[x \mapsto \dfrac{C + 2\operatorname{argth}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\right] \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}}$

- <u>Si $I =]-\infty,0[$</u> alors $x < 0$

  et donc : $\forall x \in I, \quad C'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}(1+(-x))} = -2 \times \dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}}{1+\left(\sqrt{-x}\right)^2} = \left(-2\arctan\left(\sqrt{-x}\right)\right)' = \left(-2\arctan\left(\sqrt{|x|}\right)\right)'$

  Une solution particulière de (E) sur $]0;+\infty[$ est $\left[y_0 : x \mapsto \dfrac{-2\arctan\left(\sqrt{|x|}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\right]$

  et l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ est : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left[x \mapsto \dfrac{C - 2\arctan\left(\sqrt{|x|}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\right] \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}}$

- <u>Si $I =]0,+\infty[$</u> alors $x > 0$ et donc :

  $\forall x \in I, \quad C'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-x)} = 2 \times \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\left(\sqrt{x}\right)^2} = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\right) = \left(-2\ln|1-\sqrt{x}| + 2\ln|1+\sqrt{x}|\right)'$

  Une solution particulière de (E) sur $]0;+\infty[$ est $\left[y_0 : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|\right]$

  et l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ est : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left[x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C + 2\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|\right)\right] \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}}$