PTSI : Correction des TD du chapitre *I*

Séance du 16/09/2011

Exercice E-1 $$(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x+\sqrt{3}-1=0 \qquad \text{(E)}$$

1) *Une première méthode*

On utilise la méthode de Fresnel : $\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ aussi :

$$\forall x\in\mathbb{R}, (\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cos x+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\sin x\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos x+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin x\right)$$

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ d'après le sujet aussi :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{8-(3+1+2\sqrt{3})}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{3+1-2\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

Pour prouver cette égalité, on peut montrer que $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{4-2\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2}$ et aussi que $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{4-2\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2}$

et donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et, puisque $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ $\left(\text{car } \frac{\pi}{12}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$

Finalement, $(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin x\right)=2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

et donc : $(E) \iff 2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}-1=0$

$$\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)=\cos\frac{7\pi}{12}$$

$$\iff x-\frac{\pi}{12}\equiv\frac{7\pi}{12}[2\pi] \quad\text{ou}\quad x-\frac{\pi}{12}\equiv-\frac{7\pi}{12}[2\pi] \iff x\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi] \quad\text{ou}\quad x\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

2) *Une deuxième méthode*

- Si $x\equiv\pi\ [2\pi]$, alors $\cos x=-1$ et $\sin x=0$ donc x n'est pas solution de (E).
  Aussi les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les mêmes que les solutions sur $\mathbb{R}-\{\pi+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.
  On peut donc considérer que $x\notin\{\pi+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ soit $\frac{x}{2}\notin\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ et alors $t=\tan\frac{x}{2}$ est bien défini.

- On sait alors que $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$. On a donc l'équivalence :

$$(E) \iff (\sqrt{3}+1)\frac{1-t^2}{1+t^2}+(\sqrt{3}-1)\frac{2t}{1+t^2}+\sqrt{3}-1=0 \quad\text{et}\quad t=\tan\frac{x}{2}$$

$$\iff \frac{(\sqrt{3}+1)(1-t^2)+2t(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)(1+t^2)}{1+t^2}=0 \quad\text{et}\quad t=\tan\frac{x}{2}$$

$$\iff t=\tan\frac{x}{2} \quad\text{et}\quad -2t^2+2(\sqrt{3}-1)t+2\sqrt{3}=0 \quad \text{puisque } 1+t^2>0$$

$$\iff t=\tan\frac{x}{2} \quad\text{et}\quad t^2+(1-\sqrt{3})t-\sqrt{3}=0 \quad \text{(de discriminant } \Delta=(1-\sqrt{3})^2+4\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}=3+1-2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2)$$

On peut aussi remarquer que -1 est une racine évidente. Or, le produit des racines vaut $\frac{2\sqrt{3}}{-2}$ donc l'autre racine est $\sqrt{3}$

$$\iff \left(t=-1 \quad\text{ou}\quad t=\sqrt{3}\right) \quad\text{et}\quad t=\tan\frac{x}{2}$$

$$\iff \tan\frac{x}{2}=-1=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad\text{ou}\quad \tan\frac{x}{2}=\sqrt{3}=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\iff \frac{x}{2}\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi] \quad\text{ou}\quad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}[\pi] \iff x\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \quad\text{ou}\quad x\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

$$\boxed{\text{En conclusion, l'ensemble solution de } (E) \text{ est } \mathcal{S}=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+2k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

EXERCICE E-3 Etude de la fonction $f(x)=\sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$

1) <u>*Continuité*</u> :

- On étudie la continuité par les théorèmes usuels :
  $[x\mapsto x-1]$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$
  donc, par composition, $[x\mapsto |x-1|]$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La fonction racine est continue sur $\mathbb{R}_+$
  aussi, par composition, $[x\mapsto \sqrt{|x-1|}]$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  La fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ où la fonction exponentielle est continue.
  De sorte que, par composition, $[x\mapsto e^{\frac{1}{x}}]$ est continue sur sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
  Aussi, par produit, f est continue sur sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

- Étudions la continuité en 0 :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x-1|}=1$, on obtient, par produit, que :
$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0=f(0)$ donc f est continue à gauche en 0 et $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ donc f n'est pas continue à droite en 0

On peut conclure que $\boxed{f \text{ est continue sur sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*\text{, elle n'est pas continue en 0 mais y est continue à droite}}$.

De plus, puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, $\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet l'axe des ordonnée pour asymptote verticale}}$.

2) <u>*Sens de variation de f*</u> :

- Si $x\in\mathbb{R}^*-\{1\}$, alors : $\sqrt{|x-1|}>0$ et $e^{\frac{1}{x}}>0$ donc $f(x)>0$ de sorte que $\ln|f(x)|$ existe
  et alors : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*-\{1\},\quad \ln|f(x)|=\ln\big(f(x)\big)=\ln\sqrt{|x-1|}+\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x}}$

- $[x\mapsto x-1]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$
  aussi, par composition, $[x\mapsto |x-1|]$ est dérivable sur $]-\infty,1[$ et sur $]1;+\infty[$ où elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$
  La fonction racine étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $[x\mapsto\sqrt{|x-1|}]$ est dérivable sur $]-\infty,1[$ et sur $]1;+\infty[$.
  La fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$
  donc la fonction $x\mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. De sorte que, par produit, on prouvé que
  la fonction f est dérivable sur $]-\infty;0[$, sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$: $\boxed{\text{le nombre } f'(x) \text{ existe pour } x\in\mathbb{R}^*-\{1\}}$.

- Aussi, en dérivant $\ln|f(x)|=\dfrac{1}{2}\ln|x-1|+\dfrac{1}{x}$ on a : $\forall x\in\mathbb{R}^*-\{1\}$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2(x-1)}$

On utilise le résultat : *Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I, alors $\ln|u|$ est aussi dérivable sur I et* $(\ln|u|)'=\dfrac{u'}{u}$

Mais alors $\boxed{\text{le réel } \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2(x-1)}=\dfrac{(x-1)^2+1}{2x^2(x-1)} \text{ a le signe de } x-1 \text{ sur } \mathbb{R}^*-\{1\} \text{ et ne s'annule jamais.}}$

<u>ou bien</u> : le discriminant de x^2-2x+2 est $\Delta=-4<0$ ce qui entraîne $x^2-2x+2>0$ et, par ailleurs, $2x^2>0$.

- Comme $f(x)>0$, le réel $f'(x)$ a le même signe que le réel $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ dont on a déterminé le signe.

On peut donc affirmer que : - <u>f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0;1[$</u>

- <u>f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$</u>

3) *Dérivabilité en 1* :

$$\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right| = \frac{\sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}}}{|x-1|} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{|x-1|}}.\quad \text{Or, } \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x}} = e \text{ et } \lim_{x\to 1}\sqrt{|x-1|} = 0^+ \text{ donc } \lim_{x\to 1}\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right| = +\infty.$$

Aussi, la fonction f n'est pas dérivable en 1 : la courbe représentative de f présente en $x=1$ une tangente verticale.

Dérivabilité à gauche en 0 : $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \frac{\sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}}}{|x|} = -\sqrt{|x-1|}\times\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ si $x<0$. On sait que $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty$

et $\lim_{X\to -\infty} Xe^X = 0^+$ donc $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0^+$ et, d'autre part, $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{|x-1|} = 1$ aussi $\lim_{x\to 0^-}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = 0^+$

et donc la fonction f est dérivable à gauche en $x=0$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ présente en 0^- une demi-tangente horizontale.

4) *Comportement asymptotique* :

- $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ et, d'autre part, $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{|x-1|} = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty}$

- $\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{\sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right|}e^{\frac{1}{x}}$

  Or, on sait que : $\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right|} = 0$ donc $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$

  La courbe représentative de f possède donc en $+\infty$ et en $-\infty$ des branches paraboliques dans la direction $(O;\vec{i})$

5)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 ‖	$-$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
f	$+\infty$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$