

Correction des TD du chapitre X des élèves de PTSI

EXERCICE R-1 Si E est un ensemble quelconque, alors, pour toutes parties F et G de E ,

on définit $F \Delta G = (F - G) \cup (G - F)$

$$1) \text{b) Si } E = \mathbb{R} \text{ alors } \mathbb{R}_+ \Delta \mathbb{R}_- = \underbrace{(\mathbb{R}_+ - \mathbb{R}_-)}_{=\{0\}} \cup \underbrace{(\mathbb{R}_- - \mathbb{R}_+)}_{=\{0\}} = \{0\} \cup \{0\} = \{0\}$$

2) Δ définit une loi de composition interne sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E (en effet $\Delta : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$)

2)a) Il s'agit de montrer que : $\forall (F, G) \in \mathcal{P}(E)^2, F \Delta G = G \Delta F$

Or : $F \Delta G = (F - G) \cup (G - F) = (G - F) \cup (F - G) = G \Delta F$ en utilisant l'associativité de $\cup$

La loi Δ est donc commutative

$$2) \text{b) Pour toute partie } F \text{ de } E, F \Delta \emptyset = \underbrace{(F - \emptyset)}_{=F} \cup \underbrace{(\emptyset - F)}_{=\emptyset} = F \cup \emptyset = F \text{ aussi } \boxed{\forall F \in \mathcal{P}(E), F \Delta \emptyset = \emptyset \Delta F = F}$$

On peut donc conclure que $\boxed{\emptyset \text{ est un élément neutre pour la loi } \Delta}$

$$2) \text{c) Pour toute partie } F \text{ de } E, F \Delta F = \underbrace{(F - F)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(F - F)}_{=\emptyset} = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \text{ aussi } \boxed{\forall F \in \mathcal{P}(E), F \Delta F = \emptyset}$$

On peut donc conclure que $\boxed{\text{pour toute partie } F \text{ de } E, F \text{ est son propre symétrique pour la loi } \Delta}$

3) On rappelle que : $\forall (F, G) \in \mathcal{P}(E)^2, F - G = F \cap \overline{G} (*)$ et que $\overline{\overline{F}} = F (**)$

3)a) $\forall (F, G) \in \mathcal{P}(E)^2, \overline{F \Delta G} = \overline{(F - G) \cup (G - F)} = \overline{F - G} \cap \overline{G - F}$

or $\overline{F - G} = \overline{F} \cap \overline{\overline{G}} = \overline{F} \cup \overline{\overline{G}}_{\text{par } (*)} = \overline{F} \cup G_{\text{par } (**)}$ et, de même, $\overline{G - F} = \overline{G} \cup F$ aussi $\overline{F \Delta G} = (\overline{F} \cup G) \cap (\overline{G} \cup F)$

Démontrons alors que $\overline{F \Delta G} = (F \cap G) \cup (\overline{F} \cap \overline{G})$ autrement dit $(\overline{F} \cup G) \cap (\overline{G} \cup F) = (F \cap G) \cup (\overline{F} \cap \overline{G})$

— > On peut procéder par double inclusion :

Si $x \in (\overline{F} \cup G) \cap (\overline{G} \cup F)$ alors $x \in \overline{F} \cup G$ et $x \in \overline{G} \cup F$

mais soit $x \in \overline{F}$ et $x \in \overline{G} \cup F$ soit $x \in G$ et $x \in \overline{G} \cup F$

aussi soit $x \in \overline{F}$ et $x \in \overline{G}$ car $x \notin F$ soit $x \in G$ et $x \in F$ car $x \notin G$

et donc soit $x \in \overline{F} \cap \overline{G}$ soit $x \in F \cap G$ autrement dit $x \in (F \cap G) \cup (\overline{F} \cap \overline{G})$

On a ainsi prouvé l'inclusion $\subset$ et on peut prouver (à faire) l'autre inclusion...

— > On peut utiliser aussi un raisonnement utilisant la distributivité de $\cup$ devant $\cap$ et inversement

c'est à dire que : $\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

En effet : $(\overline{F} \cup G) \cap (\overline{G} \cup F) = [\overline{F} \cap (\overline{G} \cup F)] \cup [G \cap (\overline{G} \cup F)] = [(\overline{F} \cap \overline{G}) \cup \underbrace{(\overline{F} \cap F)}_{=\emptyset}] \cup [\underbrace{(G \cap \overline{G})}_{=\emptyset} \cup (G \cap F)]$

aussi $(\overline{F} \cup G) \cap (\overline{G} \cup F) = [\underbrace{(\overline{F} \cap \overline{G}) \cup \emptyset}_{=\overline{F} \cap \overline{G}}] \cup [\underbrace{\emptyset \cup (G \cap F)}_{=G \cap F}] = (F \cap G) \cup (\overline{F} \cap \overline{G})$ CQFD!

3)b) Pour toutes parties F, G et H de E ,

$$(F \Delta G) \Delta H = [F \Delta G - H] \cup [H - F \Delta G] = [(F - G) \cup (G - F) \cap \overline{H}] \cup [H \cap \overline{F \Delta G}]$$

$$\text{aussi } (F \Delta G) \Delta H = [(F \cap \overline{G}) \cup (G \cap \overline{F}) \cap \overline{H}] \cup [H \cap (F \cap G) \cup (\overline{F} \cap \overline{G})]$$

$$\text{et donc } (F \Delta G) \Delta H = (F \cap \overline{G} \cap \overline{H}) \cup (G \cap \overline{F} \cap \overline{H}) \cup (H \cap F \cap G) \cup (H \cap \overline{F} \cap \overline{G})$$

$$\text{de sorte qu'on a bien } \boxed{(F \Delta G) \Delta H = (F \cap \overline{G} \cap \overline{H}) \cup (\overline{F} \cap G \cap \overline{H}) \cup (\overline{F} \cap \overline{G} \cap H) \cup (F \cap G \cap H)}$$

par commutativité de $\cup$ et $\cap$...

3)c) Alors, on a aussi en réalisant une permutation circulaire sur F, G et H :

$$F \Delta (G \Delta H) = (G \Delta H) \Delta F = (G \cap \overline{H} \cap \overline{F}) \cup (\overline{G} \cap H \cap \overline{F}) \cup (\overline{G} \cap \overline{H} \cap F) \cup (G \cap H \cap F) = (F \Delta G) \Delta H$$

par commutativité de Δ

par commutativité de $\cup$ et $\cap$

Aussi : $\forall (F, G, H) \in \mathcal{P}(E)^3, (F \Delta G) \Delta H = F \Delta (G \Delta H)$ autrement dit que $\boxed{\text{la loi } \Delta \text{ est associative}}$

4) La loi Δ est donc une l.c.i sur $\mathcal{P}(E)$ qui est associative (question 3), qui admet un élément neutre (question 2b)

et, pour laquelle, tout élément F de $\mathcal{P}(E)$ possède un symétrique (question 2b) aussi $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe De plus,

Δ est commutative donc $\boxed{(\mathcal{P}(E), \Delta) \text{ est un groupe abélien}}$

EXERCICE A-4 Il s'agit de vérifier l'axiomatique de la définition d'un $\mathbb{K}ev$

1) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $+$ est la loi usuelle et $\mathbb{R}$. est donnée par : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \alpha.(x, y) = (\alpha y, \alpha x)$

• Si $+$ est loi usuelle sur $\mathbb{R}^2$ càd : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

alors on sait déjà que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif.

• Par ailleurs, $\mathbb{R}$. ainsi définie est bien une loi de composition externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$.

• Il reste à vérifier la compatibilité entre $\mathbb{R}$. et les autres opérations.

- *Compatibilité entre $\mathbb{R}$. et la loi $+$ du groupe :*

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall [(x, y), (x', y')] \in (\mathbb{R}^2)^2$, a-t-on $\alpha.((x, y) + (x', y')) = \alpha.(x, y) + \alpha.(x', y')$? En utilisant les lois, on a
 $\alpha.((x, y) + (x', y')) = \alpha.(x + x', y + y') = (\alpha(y + y'), \alpha(x + x')) = \underbrace{(\alpha y + \alpha y', \alpha x + \alpha x')}_{\text{axiome } \alpha) \text{ dans } (\mathbb{R}, +, \mathbb{R}.)} = (\alpha y, \alpha x) + (\alpha y', \alpha x') = \alpha.(x, y) + \alpha.(x', y')$

- *Compatibilité entre $\mathbb{R}$. et la loi $\times$ du corps :*

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, a-t-on $(\alpha + \beta).(x, y) = \alpha.(x, y) + \beta.(x, y)$? En utilisant les lois, on a
 $(\alpha + \beta).(x, y) = ((\alpha + \beta)y, (\alpha + \beta)x) = \underbrace{(\alpha y + \beta y, \alpha x + \beta x)}_{\text{axiome } \beta) \text{ dans } (\mathbb{R}, +, \mathbb{R}.)} = (\alpha y, \alpha x) + (\beta y, \beta x) = \alpha.(x, y) + \beta.(x, y)$

- *Compatibilité entre $\mathbb{R}$. et la loi $\times$ du corps :*

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, a-t-on $(\alpha\beta).(x, y) = \alpha.(\beta.(x, y))$? En utilisant les lois, on a
 $(\alpha\beta).(x, y) = (\alpha\beta y, \alpha\beta x) = \alpha(\beta y, \beta x) = \alpha.(\beta.(y, x))$ On constate que ça ne fonctionne pas.

En effet, on peut utiliser le contre-exemple : $\alpha = 2, \beta = 3$ et $(x, y) = (0, 1)$ alors

$$(2 \times 3).(0, 1) = (6 \times 1, 6 \times 0) = (6, 0) \quad \text{et} \quad 2.(3.(0, 1)) = 2.(3, 0) = (0, 6) \neq (2 \times 3).(0, 1)$$

Remarquons que le dernier axiome n'est pas non plus vérifié : $1.(x, y) = (y, x) \neq (x, y)$ par exemple pour $(x, y) = (1, 0)$

2) E est un $\mathbb{R}ev$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $+$ est la loi du $\mathbb{R}ev$ et la loi $\mathbb{C}$. est : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (a + ib) \in \mathbb{C}, (a + ib).(x, y) = (ax - by, ay + bx)$

• Par définition du $\mathbb{R}ev$ E , $(E, +)$ est un groupe commutatif.

• La loi $\mathbb{C}$. est bien une loi de composition externe à opérateurs dans $\mathbb{C}$ car :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (a + ib) \in \mathbb{C}, \text{ alors } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et donc } (a + ib).(x, y) = (ax - by, ay + bx) \in \mathbb{R}^2$$

• Il reste à vérifier la compatibilité entre $\mathbb{R}$. et les autres opérations.

- *Compatibilité entre $\mathbb{R}$. et la loi $+$ du groupe :*

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall [(x, y), (x', y')] \in (\mathbb{R}^2)^2$ a-t-on $(a + ib).((x, y) + (x', y')) = (a + ib).(x, y) + (a + ib).(x', y')$?
 En utilisant les lois, on a :
 $(a + ib).((x, y) + (x', y')) = (a + ib).(x + x', y + y') = (a(x + x') - b(y + y'), a(y + y') + b(x + x')) = \underbrace{(ax + ax' - by - by', ay + ay' + bx + bx')}_{\text{axiome } \beta) \text{ dans } (E, +, \mathbb{R}.)}$

donc : $(a + ib).((x, y) + (x', y')) = \underbrace{(ax - by, ay + bx) + (ax' - by', ay' + bx')}_{\text{par commutativité et associativité de } +} = (a + ib).(x, y) + (a + ib).(x', y')$

- *Compatibilité entre $\mathbb{R}$. et la loi $\times$ du corps :*

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, a-t-on $(a + ib + \alpha + i\beta).(x, y) = (a + ib).(x, y) + (\alpha + i\beta).(x, y)$?
 $(a + ib + \alpha + i\beta).(x, y) = ((a + \alpha)x - (b + \beta)y, (a + \alpha)y + (b + \beta)x) = \underbrace{(ax - by, ay + bx) + (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)}_{\text{axiome } \beta) \text{ dans } (E, +, \mathbb{R}.)}$

de sorte que : $(a + ib + \alpha + i\beta).(x, y) = (a + ib).(x, y) + (\alpha + i\beta).(x, y)$

- *Compatibilité entre $\mathbb{R}$. et la loi $\times$ du corps :*

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, a-t-on $((a + ib)(\alpha + i\beta)).(x, y) = (a + ib).((\alpha + i\beta).(x, y))$?
 D'une part : $((a + ib)(\alpha + i\beta)).(x, y) = (a\alpha - b\beta + i(a\beta + \alpha b)).(x, y) = ((a\alpha - b\beta)x - (a\beta + \alpha b)y, (a\alpha - b\beta)y + (a\beta + \alpha b)x)$
 soit $((a + ib)(\alpha + i\beta)).(x, y) = (a\alpha x - b\beta x - a\beta y - \alpha by, a\alpha y - b\beta y + a\beta x + \alpha bx)$
 D'autre part : $(a + ib).((\alpha + i\beta).(x, y)) = (a + ib).(\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) = (a(\alpha x - \beta y) - b(\alpha y + \beta x), a(\alpha y + \beta x) + b(\alpha x - \beta y))$
 soit $(a + ib).((\alpha + i\beta).(x, y)) = (a\alpha x - a\beta y - b\alpha y - b\beta x, a\alpha y + a\beta x + b\alpha x - b\beta y)$ d'où le résultat par commutativité de $+$ dans E

- *Lien entre $\mathbb{C}$. et l'unité du corps :* L'unité de $\mathbb{C}$ est $1 = 1 + i \times 0$

$$\text{aussi } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 1.(x, y) = (1 + i \times 0).(x, y) = (1 \times x - 0 \times y, 1 \times y + 0 \times x) = (x, y)$$

Conclusion, on a bien obtenu une structure de $\mathbb{C}ev$. Cet espace vectoriel est le complexifié du $\mathbb{R}ev$ E .

EXERCICE A-5 Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour les lois usuelles ?

Pour ce type d'exercice, il s'agit d'abord de bien identifier "le décor" c'est à dire d'identifier l'espace ambiant. On examine les objets utilisés qui joueront le rôle de "vecteurs" et on cherche un espace ambiant associé à ces vecteurs dans nos exemples de références (cf. cours). Connaissant l'espace ambiant, on peut en déduire la nature des "scalaires", la loi $+$, la loi externe et le vecteur nul.

Il y a ensuite deux alternatives :

- soit on observe que le vecteur nul n'est pas dans l'ensemble ou qu'une des lois n'est pas stable ce qui conduit à une réponse négative.

- soit on se lance dans une preuve en montrant que l'ensemble considéré est un sev de cet espace ambiant.

1) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$ **Oui**

Les vecteurs sont ici des couples (x, y) de réels. L'espace ambiant de référence associé est donc $\mathbb{R}^2$ qui est un $\mathbb{R}\text{ev}$.

On connaît les lois sur cet espace vectoriel :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \text{et le vecteur nul est } (0, 0)$$

Montrons que E est un sev du $\mathbb{R}\text{ev}$ $\mathbb{R}^2$: - $E \subset \mathbb{R}^2$ par définition de E et $E \neq \emptyset$ puisque $(0, 0) \in E$

- stabilité pour $+$: $\forall (x, y) \in E, \forall (x', y') \in E$, a-t-on $(x, y) + (x', y') \in E$?

On sait : $(x, y) \in E \Leftrightarrow 2x + 3y = 0$ et $(x', y') \in E \Leftrightarrow 2x' + 3y' = 0$ et aussi $(x, y) + (x', y') = (\underbrace{x + x'}_{x_1}, \underbrace{y + y'}_{y_1})$

Vérifions que $(x_1, y_1) \in E$: $2x_1 + 3y_1 = 2(x + x') + 3(y + y') = (2x + 3y) + (2x' + 3y') = 0 + 0 = 0$ d'où le résultat.

- stabilité pour $\mathbb{R}$. : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E$, a-t-on $\lambda.(x, y) \in E$?

On sait : $(x, y) \in E \Leftrightarrow 2x + 3y = 0$ et $\lambda.(x, y) = (\underbrace{\lambda x}_{x_1}, \underbrace{\lambda y}_{y_1})$

Vérifions que $(x_1, y_1) \in E$: $2x_1 + 3y_1 = 2(\lambda x) + 3(\lambda y) = \lambda(2x + 3y) = \lambda \times 0 = 0$ d'où le résultat.

2) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ **Non**

L'espace ambiant est le même que dans 1)

On remarque que $(0, 0) \notin E$ car $0 + 0 = 0 \neq 1$ donc E ne peut être un espace vectoriel pour la loi $+$ usuelle.

3) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ **Non**

L'espace ambiant est le même que dans 1)

On remarque que E n'est pas stable pour $+$ puisque : $(2, 1) \in E$ et $(-1, -3) \in E$ mais $(2, 1) + (-1, -3) = (1, -2) \notin E$

4) $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_1 = 0\}$ **Oui**

Les vecteurs sont ici des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'espace ambiant de référence associé est donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est un $\mathbb{R}\text{ev}$.

On connaît les lois sur cet espace vectoriel :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda.u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et le vecteur nul est } (0)_{n \in \mathbb{N}}$$

Montrons que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition et $E \neq \emptyset$ puisque $(0)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ car tous les termes de cette suite étant nul, les termes d'indice 0 et 1 aussi.

- stabilité pour $+$: $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \forall v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, a-t-on $u + v \in E$?

On a : $u \in E \Leftrightarrow u_0 = u_1 = 0$ et $v \in E \Leftrightarrow v_0 = v_1 = 0$ et aussi $w = u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit $w_n = u_n + v_n$

Vérifions que $w = u + v \in E$: $w_0 = (u + v)_0 = u_0 + v_0 = 0 + 0 = 0$ et $w_1 = (u + v)_1 = u_1 + v_1 = 0 + 0 = 0$ donc $w = u + v \in E$

- stabilité pour $\mathbb{R}$. : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on $\lambda.u \in E$? On a : $u \in E \Leftrightarrow u_0 = u_1 = 0$ et $w = \lambda u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

soit $w_n = \lambda u_n$ aussi $w_0 = \lambda u_0 = \lambda \times 0 = 0$ et $w_1 = \lambda u_1 = \lambda \times 0 = 0$ donc $w = \lambda u \in E$

5) $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$: **Oui**

Les vecteurs sont ici des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $[f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}]$. L'espace ambiant de référence associé est donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un $\mathbb{R}\text{ev}$.

On connaît les lois sur cet espace vectoriel :

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f + g = \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) + g(t) \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \lambda.f = \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda f(t) \end{array} \right] \quad \text{et le vecteur nul est } \left[\begin{array}{ccc} 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array} \right]$$

Montrons que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: - Par définition, $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $E \neq \emptyset$ puisque $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in E$ car $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(0) = 0$

- stabilité pour $+$: $\forall f \in E, \forall g \in E$, a-t-on $f + g \in E$?

On sait : $f \in E \Leftrightarrow f(0) = 0$ et $g \in E \Leftrightarrow g(0) = 0$ aussi $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$ soit $f + g \in E$

- stabilité pour $\mathbb{R}$. : $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $\lambda f \in E$?

On sait : $f \in E \Leftrightarrow f(0) = 0$ aussi $(\lambda f)(0) = \lambda \times f(0) = \lambda \times 0 = 0$ soit $\lambda f \in E$

6) $E = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid \Re(z) = x\}$:

Les vecteurs sont ici des couples (z, x) où $z \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$. L'espace ambiant de référence associé est donc $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ qui est un $\mathbb{R}\text{ev}$ (cf. cours)

On connaît les lois sur cet espace vectoriel : **Oui**

$$\forall (z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \forall (z', x') \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (z, x) + (z', x') = (z + z', x + x') \quad \text{et} \quad \lambda.(z, x) = (\lambda z, \lambda x) \quad \text{et le vecteur nul est } (0, 0)$$

Montrons que E est un sev de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$: - Par définition, $E \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et $E \neq \emptyset$ puisque $(0, 0) \in E$ car $0 = \Re(0)$

- stabilité pour $+$: $\forall (z, x) \in E, \forall (z', x') \in E$, a-t-on $(z, x) + (z', x') \in E$?

On a : $(z, x) \in E \Leftrightarrow \Re(z) = x$ et $(z', x') \in E \Leftrightarrow \Re(z') = x'$ or $(z, x) + (z', x') = (z + z', x + x')$

Et : $\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z') = x + x'$ donc $(z, x) + (z', x') = (z + z', x + x') \in E$

- stabilité pour $\mathbb{R}$. : $\forall (z, x) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $\lambda.(z, x) \in E$?

On a : $(z, x) \in E \Leftrightarrow \Re(z) = x$ et $\lambda.(z, x) = (\lambda z, \lambda x)$

Et : $\Re(\lambda z) = \lambda \Re(z)$ puisque $\lambda \in \mathbb{R}$ aussi $\Re(\lambda z) = \lambda x$ donc $\lambda.(z, x) = (\lambda z, \lambda x) \in E$