

PTSI : Correction des TD du chapitre II

Séance du 29/09/2011

EXERCICE E-1 Recollement de solution1) Résolution de (E) : $(1-x)y' - y = x$

• On résout l'équation sur $I =]1; +\infty[$ ou $I =]-\infty; 1[$ et alors : $(E) \Leftrightarrow y' - \frac{1}{1-x} y = \frac{x}{1-x}$

- On résout d'abord l'équation homogène : (H) $y' - \frac{1}{1-x} y = 0$

La fonction $\left[a : x \mapsto -\frac{1}{1-x} \right]$ est continue sur I et une primitive de a est $[A : x \mapsto \ln|1-x|]$

L'ensemble des solutions de (H) est donc : $\mathcal{S}_H = \left\{ [x \mapsto \lambda e^{-\ln|1-x|}] \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left[x \mapsto \frac{\lambda}{|1-x|} \right] \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
 $= \left\{ \left[x \mapsto \frac{C}{1-x} \right] \mid C \in \mathbb{R} \right\}$
 car $1-x$ garde un signe constant sur I

- 1^{ere} méthode : Solution analogue au second membre

On cherche une solution particulière y_0 de (E) sous la forme $y_0(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

y_0 est alors clairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur I) et :

y_0 est une solution de (E) sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, (1-x)a - ax - b = x$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, -2ax + a - b = 0 \text{ donc il suffit d'avoir } \begin{cases} -2a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -\frac{1}{2}$$

Une solution particulière de (E) est donc $\left[y_0 : x \mapsto -\frac{1}{2}(x+1) \right]$

- 2^{eme} méthode Variations de la constante

On cherche une solution particulière y_0 de (E) sous la forme $y_0(x) = \lambda(x) \times h(x)$ où $\begin{cases} [\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}] \text{ est dérivable sur } I \\ [h : x \mapsto \frac{1}{1-x}] \text{ est solution de (H)} \end{cases}$

y_0 est une solution de (E) sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x)h(x) + \lambda(x) \times h'(x) - \frac{1}{1-x} \times \lambda(x) \times h(x) = \frac{x}{1-x} = x \times h(x)$
 $\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x)h(x) + \underbrace{\lambda(x) \times h'(x) - \frac{1}{1-x} \times \lambda(x) \times h(x)}_{=0 \text{ car } h \text{ est solution de (H)}} = x \times h(x)$
 $\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x)h(x) = x \times h(x) \quad \text{car } h(x) \neq 0 \text{ sur } I$
 $\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x) = x = \left(\frac{x^2}{2} \right)'$

Une solution particulière y_0 de (E) est donc donnée par : $\forall x \in I, y_0(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{1-x}$

L'ensemble solution de (E) sur I est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \left[\begin{array}{c} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{2}(x+1) + \frac{C}{1-x} \end{array} \right] \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left[\begin{array}{c} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{1-x} + \frac{\lambda}{1-x} \end{array} \right] \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Il y a bien égalité entre les deux ensembles car : $-\frac{1}{2}(x+1) + \frac{C}{1-x} = \frac{1}{2} \times \frac{x^2-1}{1-x} + \frac{C}{1-x} = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{1-x} + \frac{\lambda}{1-x}$ où $\lambda = C - \frac{1}{2}$

• On étudie le recollement des solutions en 1 pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}$

Analyse : Si f est une solution sur $\mathbb{R}$,

- c'est aussi une solution sur $]1; +\infty[$ et sur $] -\infty; 1[$ aussi :

$$\exists C_1 \in \mathbb{R}, \forall x < 1, f(x) = -\frac{x+1}{2} + \frac{C_1}{1-x} \quad \text{et} \quad \exists C_2 \in \mathbb{R}, \forall x > 1, f(x) = -\frac{x+1}{2} + \frac{C_2}{1-x}$$

- f doit être continue en 1 c'est à dire que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C_1 \neq 0 \\ -1 & \text{si } C_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C_2 \neq 0 \\ -1 & \text{si } C_2 = 0 \end{cases}$$

aussi nécessairement $C_1 = 0$ pour assurer la continuité à gauche et $C_2 = 0$ pour assurer la continuité à droite

Finalement, s'il y a une solution sur $\mathbb{R}$, la seule fonction possible est $\left[f : x \mapsto -\frac{x+1}{2} \right]$

Synthèse : On vérifie que cette fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie l'équation.

C'est donc l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$

Finalement, l'équation (E) a une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui est $f : x \mapsto -\frac{x+1}{2}$

- On résout l'équation (E) sur $I =]-\infty, -1[, I =]-1, 0[, I =]0, 1[$ ou $I =]1; +\infty[$ où : $(E) \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x \ln |x|} y = \frac{2 \ln |x|}{x^2}$

-On résout d'abord l'équation homogène : (H) $y' - \frac{1}{x \ln |x|} y = 0$

-On résout d'abord l'équation homogène : (H) $y' - \frac{1}{x \ln |x|} y = 0$

La fonction $\left[a : x \mapsto -\frac{1}{x \ln |x|} \right]$ est continue sur I et une primitive de a est $[A : x \mapsto -\ln |\ln |x||]$ car $a(x) = -\frac{(\ln |x|)'}{\ln |x|}$

L'ensemble solution de (H) est donc $\mathcal{S}_H = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\ln |\ln |x||} \end{array} \right] \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C \ln |x| \end{array} \right] \mid C \in \mathbb{R} \right\}$
car $\ln |x|$ garde un signe constant sur I .

-On cherche une solution particulière y_0 de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante

en cherchant la solution sous la forme $y_0(x) = C(x) \times h(x)$ où $\begin{cases} [C : I \rightarrow \mathbb{R}] \text{ est dérivable sur } I \\ [h : x \mapsto \ln |x|] \text{ est une solution de } (H) \end{cases}$

$$\text{aussi : } y_0 \text{ est une solution de (E)} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad C'(x) \times h(x) + C(x) \times h'(x) - \frac{1}{x \ln|x|} \times C(x) \times h(x) = \frac{2 \ln|x|}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad C'(x) \times \ln |x| = \frac{2 \ln |x|}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad C'(x) = \frac{2}{x^2} = \left(-\frac{2}{x}\right)$$

Une solution particulière y_0 de (E) est donc donnée par : $\forall x \in I, \quad y_0(x) = -\frac{2}{x} \ln |x|$

Finalement, l'ensemble des solutions sur I de (E) est $\mathcal{S} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto -\frac{2\ln|x|}{x} + C\ln|x| \end{array} \right] \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$

- Il s'agit désormais d'étudier le recollement des solutions pour trouver des solutions sur $\mathbb{R}$.

Analyse : Si f est une solution sur $\mathbb{R}$,

- c'est aussi une solution sur $] - 1; 0[$ et sur $] 0; 1[$ aussi :

$$\exists C_- \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1, 0[, \quad f(x) = -\frac{2 \ln |x|}{x} + C_- \ln |x| \quad \text{et} \quad \exists C_+ \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = -\frac{2 \ln |x|}{x} + C_+ \ln |x|$$

$$-f \text{ doit \^etre continue en } 0. \quad \text{Or : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\left(-\frac{2}{x} + C_-\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} \pm \infty} \underbrace{\ln|x|}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty} = \mp \infty$$

aussi le recollement continue en 0 est impossible! L'analyse aboutit à : $\mathcal{S} \subset \emptyset \dots$ et donc en fait $\mathcal{S} = \emptyset$

L'équation (E) n'a donc aucune solution sur $\mathbb{R}$

- On étudie le recollement en 1 pour trouver des solutions sur $]0; +\infty[$.

Analyse : Si f est une solution sur $]0; +\infty[$ alors :

-c'est une solution sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ donc :

$$\exists C_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = -\frac{2 \ln x}{x} + C_1 \ln x \quad \text{et} \quad \exists C_2 \in \mathbb{R}, \forall x > 1, \quad f(x) = -\frac{2 \ln x}{x} + C_2 \ln x$$

- f doit être continue en 1. Mais, clairement : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$

donc f est continue en 1 avec $f(1) = 0$ quelquesoient les constantes C_1 et C_2

- f doit aussi être dérivable en 1. Or :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\underbrace{-\frac{2}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 1} -2} \times \underbrace{\frac{\ln x}{x - 1}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{1} = 1} + C_1 \underbrace{\frac{\ln x}{x - 1}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{1} = 1} \right) = -2 + C_1 \quad \text{et, de même,} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2 + C_2$$

il est donc nécessaire que $\overset{x \rightarrow 1}{-2 + C_1} = \overset{x \rightarrow 1}{-2 + C_2}$ soit $C_1 = C_2$ et alors $f'(1) = -2 + C_1$

L'analyse aboutit à : $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0; +\infty[\\ x \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{R} \\ \rightarrow -\frac{2 \ln x}{x} + C \ln x \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$, la synthèse vérifie l'autre inclusion

Synthèse : Les fonctions $x \mapsto -\frac{2 \ln x}{x} + C \ln x$ où $C \in \mathbb{R}$ sont bien continues et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et y vérifie (E)

3) *Résolution du système de Cauchy* (E) : $y' \cos x + 2y \sin x = 1 + \sin^2 x$ et $y(0) = 0$

- On résout l'équation sur les intervalles $I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ pour $k \in \mathbb{Z}$ où $\cos x \neq 0$.

Sur un tel intervalle I_k , (E) $\Leftrightarrow y' + 2 \tan x y = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos x}$

- On résout d'abord sur I_k l'équation homogène (H) : $y' + 2 \tan x y = 0$.

La fonction $[a : x \mapsto 2 \tan x]$ est continue sur I_k donc elle admet des primitives sur I_k .

Une primitive sur I_k de a où $a(x) = 2 \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \frac{\cos'(x)}{\cos x}$ est A où $A(x) = -2 \ln |\cos x| = -\ln(\cos^2 x)$

Aussi, les solutions sur I_k de l'équation homogène sont les fonctions $[x \mapsto C e^{\ln(\cos^2 x)}]$ où $C \in \mathbb{R}$ soit finalement :

les solutions sur I_k de l'équation homogène (H) sont les fonctions $[x \mapsto C \cos^2 x]$ où $C \in \mathbb{R}$

- Il s'agit de trouver une solution particulière de l'équation (E) sur I_k .

On recherche la solution particulière y_0 sous la forme $y_0(x) = A \cos x + B \sin x$ alors $y_0'(x) = -A \sin x + B \cos x$

$$y_0 \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow \forall x \in I_k, -A \sin x \cos x + B \cos^2 x + 2A \sin x \cos x + 2B \sin^2 x = 1 + \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I_k, 2A \sin x \cos x + B + B \sin^2 x = 1 + \sin^2 x$$

En identifiant, il suffit de prendre $A = 0$ et $B = 1$ aussi $[y_0 : x \mapsto \sin x]$ est une solution particulière de (E) sur I_k .

On pouvait aussi remarquer que $\sin$ était une solution évidente dès le départ...

- Finalement,

Les solutions de l'équation (E) sur $I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont les fonctions $[x \mapsto C \cos^2 x + \sin x]$ où $C \in \mathbb{R}$

- Recollement des solutions*

On remarque qu'il s'agit d'étudier le recollement des solutions en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ quelconque

c'est à dire entre l'intervalle $I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ et l'intervalle $I_{k+1} = \left] \underbrace{-\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi}_{=\frac{\pi}{2}+k\pi} \right[$

Analyse : Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors

- c'est aussi une solution sur chacun des intervalles I_k aussi

$$\begin{aligned} & \forall k \in \mathbb{Z}, \exists C_k \in \mathbb{R}, \forall x \in I_k, f(x) = C_k \cos^2 x + \sin x \\ \text{On a alors : } f(x) &= \begin{cases} \sin x + C_k \cos^2 x & \text{si } x \in I_k \\ \sin x + C_{k+1} \cos^2 x & \text{si } x \in I_{k+1} \end{cases} \quad \text{donc} \quad f'(x) = \begin{cases} \cos x - 2C_k \cos x \sin x & \text{si } x \in I_k \\ \cos x - 2C_{k+1} \cos x \sin x & \text{si } x \in I_{k+1} \end{cases} \end{aligned}$$

- f doit être continue en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ or

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi^-} f(x) = (-1)^k = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi^+} f(x) \quad \text{puisque} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

$$\text{donc } f \text{ est continue en } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et : } \forall k \in \mathbb{Z}, f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

- f doit être dérivable $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ or $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi^-} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi^+} f'(x)$

donc, d'après le théorème de prolongement d'une dérivée, f est dérivable en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et : $\forall k \in \mathbb{Z}, f'\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$

Ainsi, il n'y a pas de conditions à imposer pour assurer le recollement des solutions !

Si f est une solution sur $\mathbb{R}$, alors : $\forall k \in \mathbb{Z}, \exists C_k \in \mathbb{R}, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right], f(x) = \sin x + C_k \cos^2 x$

- Condition initiale*

On impose la condition initiale $f(0) = 0$ autrement dit $f(0) = C_0 = 0$.

Par contre, il n'y a pas d'autre condition sur les constantes C_k lorsque $k \in \mathbb{Z}^*$. Finalement :

Les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ avec la condition $y(0) = 0$ sont les fonctions f telles que :
 $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \sin x$ et $\forall k \in \mathbb{Z}^*, \exists C_k \in \mathbb{R}, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right], f(x) = \sin x + C_k \cos^2 x$

*Cet exercice illustre le fait qu'il n'y a pas unicité de la solution sur I
 au problème de Cauchy $\begin{cases} \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ lorsque α s'annule sur I*