Correction des TD du chapitre VII des élèves de PTSI

EXERCICE R-5

1) $x^2+y^2-4x-2y+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-1)^2-1+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=1$

On reconnaît une équation cartésienne de cercle : $\boxed{\mathcal{C} \text{ est le cercle de centre } \Omega\,(2;1) \text{ et de rayon } 1}$

2) Déterminons une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_m$. La droite $\mathcal{D}_m$ passe par le point $A(-1;0)$ et elle admet m pour coefficient directeur aussi le vecteur $\overrightarrow{u}_m\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_m$

$$M\,(x;y)\in\mathcal{D}_m \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u}_m \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u}_m)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1\\ y & m\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow mx+m-y=0$$

On peut aussi passer par une représentation paramétrique :

$$M\,(x;y)\in\mathcal{D}_m \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l}x=-1+t\\y=mt\end{array}\right. \Leftrightarrow y=m(x+1)$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_m$ est $mx-y+m=0$. Pour présiser la position de $\mathcal{D}_m$ par rapport à $\mathcal{C}$, on calcule la distance $d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)$ en utilisant la formule du cours :

$$d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)=\frac{|m\times 2-1+m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

La position de $\mathcal{D}_m$ par rapport à $\mathcal{C}$ dépend du signe de $d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)-1$ Or :

$$d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)-1=\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}-1=\frac{|3m-1|-\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{(3m-1)^2-(m^2+1)}{\sqrt{m^2+1}(|3m-1|+\sqrt{m^2+1})}=\frac{8m^2-6m}{\sqrt{m^2+1}(|3m-1|+\sqrt{m^2+1})}$$
$$=\frac{2m(4m-3)}{\sqrt{m^2+1}(|3m-1|+\sqrt{m^2+1})}$$

Comme $\sqrt{m^2+1}>0$ et $|3m-1|+\sqrt{m^2+1}>0$, alors le signe de $d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)-1$ est celui de $2m(4m-3)$

On peut aussi remarquer que le signe de $d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)-1$ est le même que celui de $d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)^2-1$

Or $d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)^2-1=\dfrac{2m(4m-3)}{m^2+1}$ a le signe de $2m(4m-3)$ puisque $m^2+1>0$

aussi :

- si $m\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$ alors $d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)>1$ et donc :
  la droite $\mathcal{D}_m$ ne rencontre pas le cercle $\mathcal{C}$, l'intersection $\mathcal{D}_m\cap\mathcal{C}$ est vide.
- si $m=0$ ou $m=\frac{3}{4}$ alors $d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)=1$ et donc :
  la droite $\mathcal{D}_m$ est alors une tangente au cercle $\mathcal{C}$, l'intersection $\mathcal{D}_m\cap\mathcal{C}$ est réduite à un point.
- si $m\in\left]0;\frac{3}{4}\right[$ alors $d\,(\Omega;\mathcal{D}_m)<1$ et donc :
  la droite $\mathcal{D}_m$ coupe le cercle $\mathcal{C}$, l'intersection $\mathcal{D}_m\cap\mathcal{C}$ est réduite à deux points.

3) Les deux tangentes issues de A au cercle $\mathcal{C}$ sont donc les droites $\mathcal{D}_m$ correspondant à $m=0$ et $m=\dfrac{3}{4}$.

- Une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{D}_0$ est $-y=0$ ou encore $y=0$.
  L'équation normale de $\mathcal{D}_0$ est donc : $\boxed{(\mathcal{D}_0):\quad \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)x+\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)y=0}$
- Une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{D}_{\frac{3}{4}}$ est $\frac{3}{4}x-y+\frac{3}{4}=0$ soit encore $3x-4y+3=0$
  Un vecteur normal de $\mathcal{D}_{\frac{3}{4}}$ est $\overrightarrow{n}_{\frac{3}{4}}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ et $\left\|\overrightarrow{n}_{\frac{3}{4}}\right\|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ a ussi un vecteur normal unitaire est $\dfrac{\overrightarrow{n}_{\frac{3}{4}}}{\left\|\overrightarrow{n}_{\frac{3}{4}}\right\|}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ où $\theta=\arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right)_{\text{car }\cos\theta>0}$ ou bien $\theta=-\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)_{\text{car }\sin\theta>0}$
  Une équation normale de $\mathcal{D}_{\frac{3}{4}}$ est donc $\boxed{(\mathcal{D}_{\frac{3}{4}})\quad(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=-\frac{3}{5}\quad\text{ou } \theta=\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)}$

4) On vérifie que : $\left(\dfrac{13}{5}-2\right)^2+\left(\dfrac{9}{5}-1\right)^2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}+\dfrac{16}{25}=1$ donc $\boxed{B\in\mathcal{C}}$

La tangente $\mathcal{T}_B$ au cercle $\mathcal{C}$ au point B passe par $B\left(\dfrac{13}{5};\dfrac{9}{5}\right)$ et elle est normale au vecteur $\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathcal{T}_B \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{\Omega B} \text{ sont orthogonaux} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{\Omega B}=0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-\frac{13}{5}\\ y-\frac{9}{5}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow \frac{3}{5}x-\frac{39}{25}+\frac{4}{5}y-\frac{36}{25}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x+4y-15=0\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Finalement, une équation cartésienne de la tangente au cercle } \mathcal{C} \text{ au point } B \text{ est } \quad 3x+4y-15=0}$

5) $\Omega C=\sqrt{(3-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}>1$: $\boxed{\text{le point } C(3;0) \text{ est extérieur au cercle } \mathcal{C}}$ de centre $\Omega(2;1)$ de rayon 1

On cherche les coordonnées des points de contact sur le cercle des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ issues de $C(3;0)$.

Si $P(x;y)$ est un point de contact d'une des tangentes avec le cercle, on a : $\overrightarrow{\Omega P}.\overrightarrow{CP}=0$

soit : $\overrightarrow{\Omega P}.\overrightarrow{CP}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x-2\\ y-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-3\\ y\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-5x+6+y^2-y=0$

Puisque d'autre part P est un point du cercle $\mathcal{C}$, les coordonnées de P vérifient le système :

$$\begin{aligned}\begin{cases}x^2+y^2-5x-y+6=0 & (L_1)\\ x^2+y^2-4x-2y+4=0 & (L_2)\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}x-y-2=0 & (L_1\to L_2-L_1)\\ x^2+y^2-4x-2y+4=0 & (L_2)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=y+2\\ (y+2)^2+y^2-4(y+2)-2y+4=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=y+2\\ 2y^2-2y=2y(y-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=2\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y=1\\ x=3\end{cases}\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{les tangentes au cercle } \mathcal{C} \text{ qui passe par } C(3;0) \text{ coupent le cercle aux points } P_1(2;0) \text{ et } P_2(3;1)}$

EXERCICE A-8 Pour tout point M du plan complexe, on notera z_M l'affixe du point M

1) On a $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{(1-i)-2}{(1+i)-2}=\dfrac{-1-i}{-1+i}=\dfrac{(-1-i)^2}{2}=\dfrac{1+2i-1}{2}=i$ aussi $\dfrac{AB}{AC}=\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$

et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$: $\boxed{ABC \text{ est donc isocèle rectangle indirect en } A}$

2) C, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CM'}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CM'})=0$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\overline{(z_M-z_C)}(z_{M'}-z_C)\right)=0$

• Γ est le cercle de diamètre $[BC]$ donc c'est le cercle de centre Ω le milieu de $[BC]$ et de rayon $\dfrac{BC}{2}$

où $z_\Omega=\dfrac{z_B+z_C}{2}=1$ et $\dfrac{BC}{2}=\dfrac{|z_B-z_C|}{2}=\dfrac{|-2i|}{2}=1$

On a alors : $M(z_M)$ est un point de $\Gamma \Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R},\quad z_M=1+e^{i\theta}$.

$\boxed{\textbf{\textit{Plus généralement, si }} \Gamma \textbf{\textit{ est le cercle de centre }} \Omega(\omega) \textbf{\textit{ de rayon }} r\textbf{\textit{, alors : }} M(z_M)\in\Gamma \Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R},\quad z_M=\omega+re^{i\theta}}$

• r est la rotation de centre A qui transforme B en C donc r est la rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

Or, on a vu que ABC est un triangle isocèle rectangle avec $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ aussi $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

r est donc la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ autrement dit

M' est l'image de M par $r \Leftrightarrow z_{M'}=z_A+e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_M-z_A) \Leftrightarrow z_{M'}=2-i(1+e^{i\theta}-2)=2-i(e^{i\theta}-1)$

Alors

$\overline{(z_M-z_C)}(z_{M'}-z_C)=\overline{(1+e^{i\theta}-1-i)}(2-i(e^{i\theta}-1)-1-i)=(e^{-i\theta}+i)(1-ie^{i\theta})=e^{-i\theta}-i+i+e^{i\theta}=2\cos\theta$

Par suite $\operatorname{Im}\left(\overline{(z_M-z_C)}(z_{M'}-z_C)\right)=0$ ce qui équivaut à $\boxed{C, M \text{ et } M' \text{ sont alignés}}$