

Correction des TD du chapitre VIII

EXERCICE E-1 Pour n entier naturel quelconque, on définit $I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n dx$

1) a) • $[x \mapsto \ln(1+x)]$ est continue sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[0; \ln 2]$ et, lorsque $n \in \mathbb{N}$, $[x \mapsto x^n]$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $[x \mapsto (\ln(1+x))^n]$ est continue sur $[0; 1]$ ce qui assure l'existence de l'intégrale I_n pour toutes valeurs de n dans $\mathbb{N}$.

• D'autre part, $\left[x \mapsto \frac{2}{1+x}\right]$ est une fraction rationnelle qui est continue sur $[0; 1]$ puisque $-1 \notin [0; 1]$ donc la fonction $\left[x \mapsto \frac{2}{1+x} (\ln(1+x))^n\right]$ est aussi continue sur $[0; 1]$ ce qui assure l'existence de l'intégrale $J_n = \int_0^1 \frac{2}{1+x} (\ln(1+x))^n dx$.

• Si on définit $[u : x \mapsto \ln(1+x)]$ alors u est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et : $\forall x \in [0; 1], u'(x) = \frac{1}{1+x}$.

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}, \text{ alors : } J_n = 2 \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{=u'(x)} \times \underbrace{(\ln(1+x))^n}_{=(u(x))^n} dx = 2 \left[\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 2 \frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{Finalement, on a prouvé que : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{2}{1+x} (\ln(1+x))^n dx = 2 \frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}}$$

b) On fixe n dans $\mathbb{N}$. On va prouver : $0 \leq I_n \leq J_n$

• La première inégalité s'obtient facilement par positivité de l'intégrale : $\forall x \in [0, 1], (\ln(1+x))^n \geq 0$ et $0 \leq 1$

$$\text{donc } I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n dx \geq 0$$

• Pour l'autre inégalité, deux approches sont possibles :

On montre : $J_n - I_n \geq 0$ en effet :

$$\begin{aligned} J_n - I_n &= \int_0^1 4 \left(\frac{2}{1+x} - 1 \right) (\ln(1+x))^n dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} (\ln(1+x))^n dx \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \forall x \in [0, 1], \frac{1-x}{1+x} (\ln(1+x))^n \geq 0$$

et $0 \leq 1$ donc, par positivité de l'intégrale : $J_n - I_n \geq 0$

On utilise la croissance de l'intégrale

$$\text{On a : } \forall x \in [0, 1], \frac{2}{1+x} \geq \frac{2}{1+1} = 1$$

(Pour minorer, on augmente le dénominateur)

Aussi : $\forall x \in [0; 1], (\ln(1+x))^n \leq \frac{2}{1+x} (\ln(1+x))^n$ et $0 \leq 1$ donc, par croissance de l'intégrale

$$\text{on a : } 0 \leq \int_0^1 (\ln(1+x))^n dx \leq \int_0^1 \frac{2}{1+x} (\ln(1+x))^n dx$$

$$\text{Ainsi : } 0 \leq I_n \leq 2 \frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1} \text{ d'après la question précédente} \quad \text{Ainsi : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq 2 \frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}}$$

$$\text{c) Mais alors : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{I_n}{(\ln 2)^n} \leq 2 \frac{\ln 2}{n+1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln 2}{n+1} = 0$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{(\ln 2)^n} = 0$ autrement dit $I_n = o((\ln 2)^n)$

$$\boxed{(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bien négligeable devant une suite géométrique de raison } \ln 2}$$

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 1 \times (\ln(1+x))^n dx$ Réalisons une intégration par parties :

Si $u(x) = (\ln(1+x))^n$ alors u est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et $u'(x) = n \times (\ln(1+x))^{n-1} \times \frac{1}{1+x}$

Si $v(x) = x+1$ alors v est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et $v'(x) = 1$

$$\text{aussi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = [(x+1)(\ln(x+1))^n]_0^1 - \int_0^1 n \times (\ln(1+x))^{n-1} \times \frac{1}{1+x} \times (1+x) dx$$

$$\text{soit : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = 2(\ln 2)^n - n I_{n-1}}$$

2) b) On sait que $I_n = o((\ln 2)^n)$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n I_{n-1} = 2(\ln 2)^n - I_n = 2(\ln 2)^n + o((\ln 2)^n) \sim 2(\ln 2)^n$

$$\text{donc } (n+1)I_n \sim 2(\ln 2)^{n+1} \quad (\text{car } n+1 \rightarrow +\infty \text{ si } n \rightarrow +\infty) \text{ soit } I_n \sim \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1} \text{ soit enfin } \boxed{I_n \sim \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n}}$$

EXERCICE E-2 Pour tout x réel non nul, on pose $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1) $[x \mapsto x]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $[x \mapsto e^x - 1]$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$
 aussi, par quotient, la fonction f est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$

Il reste donc à justifier le caractère C^1 de f en 0.

– > Montrons, tout d'abord, que f est continue et dérivable en 0 :

• On peut utiliser une méthode classique en procédant étape par étape :

-On calcule d'abord la limite en 0 de $f(x)$: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \sim_0 \frac{x}{x} \sim_0 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ aussi

on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$

-Ensuite, on calcule la limite du taux d'accroissement : $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \frac{x - e^x - 1}{x(e^x - 1)}$

On obtient un équivalent du numérateur à l'aide d'un $DL_2(0)$ de e^x :

$$x - e^x - 1 = x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim_0 -\frac{x^2}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x - e^x - 1}{x(e^x - 1)} \sim_0 \frac{-\frac{x^2}{2}}{x \times x} \sim_0 -\frac{1}{2}$$

Aussi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$: f , prolongée sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$, est donc dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$

•(Plus rapide !) On peut aussi calculer directement un $DL_1(0)$ de f en partant des DL usuels :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + o(x)} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

Remarque : En partant d'un $DL_1(0)$ de $e^x - 1$, on obtiendra seulement un $DL_0(0)$ à cause de la simplification $\frac{o(x)}{x} = o(1)$

(Cette méthode est à la limite du programme car $e^x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais l'obtention de DL n'est pas si compliquée...)

Puisque f admet un DL_1 en 0, on sait, d'après le cours (résultat sur DL et continuité et résultat sur DL et dérivabilité)

que f est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0 avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$

– > Dans les deux cas, il reste à prouver le caractère C^1 autrement dit la continuité de f' en 0 soit : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$

On doit donc déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$. On connaît un équivalent du dénominateur : $(e^x - 1)^2 \sim_0 x^2$

donc il reste à trouver un équivalent du numérateur qu'on va obtenir avec des développements limités.

On calcule un $DL(0)$ du numérateur au moins à l'ordre 2 (car il faut compenser le dénominateur qui est d'ordre 2...)

$$e^x - 1 - xe^x = \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x\left(1 + x + o(x)\right) = x + \frac{x^2}{2} - x - x^2 + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{donc} \quad e^x - 1 - xe^x \sim_0 -\frac{x^2}{2}$$

Finalement : $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} \sim_0 \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} \sim_0 -\frac{1}{2}$ soit $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$ et donc on a justifié que f' est continue en 0

Remarque : On peut aussi, après avoir prolongé par continuité, utiliser directement le théorème de prolongement d'une dérivée.

En calculant de suite la limite de $f'(x)$ en 0, on obtient alors l'existence de $f'(0)$ et la continuité de f' en 0 d'un seul coup...

Mais on prend le risque de perdre du temps (en effet $f'(x)$ peut ne pas avoir de limite en 0 et $f'(0)$ exister quand même...)

Ici, vu la formulation de l'énoncé, on était sûr que $f'(x)$ aurait une limite. L'utilisation du théorème était donc judicieuse...

La fonction f est donc de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$ et elle est prolongeable par continuité en 0 avec un prolongement qui est dérivable en 0 et à dérivée continue en 0 donc un prolongement C^1 en 0 aussi :

le prolongement par continuité de f en 0 est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

2) Étudions les variations de f : $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$ aussi $f'(x)$ a le signe de $e^x - 1 - xe^x$

Pour déterminer le signe de $\varphi(x) = e^x - 1 - xe^x$ sur $\mathbb{R}$, on étudie les variations de $\left[\varphi : x \mapsto e^x - 1 - xe^x\right]$:

φ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$ qui a le signe de $-x$ sur $\mathbb{R}$

Aussi, φ est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$ puis strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

donc φ atteint un maximum strict en 0 qui vaut $\varphi(0) = 0$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi(x) < 0$ et par suite $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus : $f(x) \sim_{-\infty} \frac{x}{-1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ car $e^x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$ et $f(x) \sim_{+\infty} \frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car clairement $1 =_{+\infty} o(e^x)$

On a donc prouvé que f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ donc

f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ autrement dit : $\forall y \in]0, +\infty[, \exists! x \in \mathbb{R}, y = f(x)$

Aussi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{n} \in]0, +\infty[$ donc il possède un unique antécédant $u_n = f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

On a donc justifié que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$

3) Cherchons d'abord la limite de $u_n : u_n = f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

or $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et f^{-1} est continue en 1 donc $u_n = f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f^{-1}(1) = 0$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

En effet, d'après le théorème des bijections réciproques, f^{-1} est continue (et strictement décroissante) sur $]0, +\infty[$ et $f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 1$
Un $DL_1(0)$ de f est : $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ qu'on obtient soit par calcul soit en utilisant Taylor-Young à l'ordre 1 puisque f est C^1

or $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} = 1 - \frac{u_n}{2} + o(u_n) \Leftrightarrow -\frac{2}{n} = u_n + o(u_n)$ donc $u_n \sim -\frac{2}{n}$ (Caractérisation $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g)$)
car $u_n \rightarrow 0$

EXERCICE R-6 $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = 2 \tan x - x$

1) On va utiliser le théorème des bijections réciproques. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (par les théorèmes usuels) et : $\forall x \in I$, $f'(x) = 2(1 + \tan^2 x) - 1 = 1 + 2 \tan^2 x > 0$ aussi f est strictement croissante sur I
De plus : $f(x) = 2 \tan x - x \sim_{\pm \frac{\pi}{2}} \pm \frac{\pi}{2} \tan x$ puisque $x = o_{\pm \frac{\pi}{2}}(\tan x)$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$

La fonction f est continue et strictement croissante sur I : elle réalise une bijection de I vers $\mathbb{R}$

On peut donc définir une fonction réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
et la réciproque est même dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I .

Il reste à prouver que f^{-1} est impaire c'est à dire que : $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y) \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(-y)\right) = f\left(-f^{-1}(y)\right)$

Or : $f\left(-f^{-1}(y)\right) = -f\left(f^{-1}(y)\right) = -y$ (par imparité de f) et : $-y = f\left(f^{-1}(-y)\right)$ puisque f et f^{-1} sont réciproques

On a donc bien démontré l'imparité de la réciproque f^{-1} de f

2) On sait que f^{-1} est de classe C^6 donc elle possède un $DL_6(0)$. Puisque f^{-1} est impaire, on peut le chercher sous la forme : $f^{-1}(y) = a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + o(y^6)$ où $(a_1, a_3, a_5) \in \mathbb{R}^3$ sont à déterminer
L'idée est alors de déterminer de 2 façons un $DL_6(0)$ de $[x \mapsto x]$ puis d'identifier ces DL à cause de l'unicité des DL
- On a, bien évidemment : $x = x + o(x^6)$ d'une part.

- Comme $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$, on peut obtenir un $DL_6(0)$ de $x = f^{-1}(f(x))$ à partir du $DL_6(0)$ précédent de f^{-1}

$$\begin{aligned} \text{et d'un } DL_6(0) \text{ de } f : f(x) &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)\right) - x = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^6) \\ x = f^{-1}(f(x)) &= a_1 \left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5\right) + a_3 \left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5\right)^3 + a_5 \left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5\right)^5 + o(x^6) \\ &= a_1 x + \frac{2}{3}a_1 x^3 + \frac{4}{15}a_1 x^5 + a_3(x^3 + 2x^5) + a_5(x^5) + o(x^6) \\ &= a_1 x + \left(\frac{2}{3}a_1 + a_3\right)x^3 + \left(\frac{4}{15}a_1 + 2a_3 + a_5\right)x^5 + o(x^6) \end{aligned}$$

En identifiant ces deux DL : $x = x + o(x^6) = a_1 x + \left(\frac{2}{3}a_1 + a_3\right)x^3 + \left(\frac{4}{15}a_1 + 2a_3 + a_5\right)x^5 + o(x^6)$

on trouve que (a_1, a_3, a_5) est solution de $\begin{cases} a_1 & & = 1 \\ \frac{2}{3}a_1 + a_3 & & = 0 \\ \frac{4}{15}a_1 + 2a_3 + a_5 & & = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{2}{3} \\ a_5 = -\frac{4}{15} + \frac{4}{3} = \frac{16}{15} \end{cases}$

Finalement, le $DL_6(0)$ de la fonction f^{-1} est $f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + o(x^6)$