PTSI : Correction des TD du chapitre IX

<u>EXERCICE E-1</u> *Étude de la courbe paramétrée* $f(t) = \left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t}, -\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1}\right)$

On pose $\qquad x(t) = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{t(t-1)} \qquad$ et $\qquad y(t) = -\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1} = \dfrac{-1}{t(t+1)}$

et on note $M_t\big(x(t); y(t)\big)$ le point de paramètre t

• *Domaine de définition, domaine d'étude*

- Il est clair que la courbe paramétrée ci-dessus est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$
- Ce domaine est symétrique par rapport à 0 et, si t appartient à $\mathcal{D}_f$:

$$x(-t) = \frac{1}{-t-1} - \frac{1}{-t} = -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} = -y(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = -\frac{1}{-t} + \frac{1}{-t+1} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} = -x(t)$$

aussi les points M_{-t} et M_t sont symétriques par rapport à la droite $y = -x$

Il suffit donc d'étudier f sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$: si on trace la courbe Γ_1 représentant f sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$

et si Γ_2 est la courbe symétrique de Γ_1 par rapport à $y = -x$ alors Γ_2 représente f sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$

et donc la totalité du support de f sur $\mathcal{D}_f$ est donnée par la courbe $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$

• *Variations de x et y sur* $]0; 1[\cup]1; +\infty[$

- x et y définissent clairement des fonctions C^∞ sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$ et :

$$\forall t \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, \quad x'(t) = -\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{1-2t}{t^2(t-1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{2t+1}{t^2(t+1)^2}$$

t	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x'(t)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
x	‖ $-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0
$y'(t)$	‖	$+$	$\frac{32}{9}$	$+$	$\frac{3}{4}$	$+$	
y	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

• $x'(t)$ a donc le signe de $1 - 2t$
et $\quad x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

• $y'(t)$ a donc le signe de $1 + 2t$
et $y'(t)$ ne s'annule pas sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$

• $x\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = -4$

• $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{4}{3}$

• $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\frac{1}{4} \times \frac{9}{4}} = \dfrac{32}{9}$

• Clairement, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$
puisque $x(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$ et $y(t) \sim_{+\infty} -\frac{1}{t^2}$

donc $\boxed{\text{l'origine est un point limite pour } t \to +\infty}$

et $\quad \dfrac{y(t) - 0}{x(t) - 0} = \dfrac{y(t)}{x(t)} \sim_{+\infty} \dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} \sim_{+\infty} -1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} -1$

donc $\boxed{\text{la tangente à l'origine est de pente } -1}$
aussi elle est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $x(t) \sim_0 -\dfrac{1}{t} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ et $y(t) \sim_0 -\dfrac{1}{t} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ donc il y a une branche infinie lorsque $t \to 0$:

$$\frac{y(t)}{x(t)} \sim_0 \frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t}} \sim_0 1 \qquad \text{puis} \qquad y(t)-x(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t-1} = \frac{-2}{t^2-1} \sim_0 2$$

aussi $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x+2 \text{ est une asymptote à la courbe lorsque } t \to 0}$

De plus, $y(t)-x(t)-2 = \dfrac{-2}{t^2-1} - 2 = \dfrac{-2t^2}{t^2-1} \sim_0 2t^2$ donc $y(t)-x(t)-2 > 0$ au voisinage de 0

la courbe est donc au dessus de l' asymptote $y = x+2$ lorsque t est voisin de 0

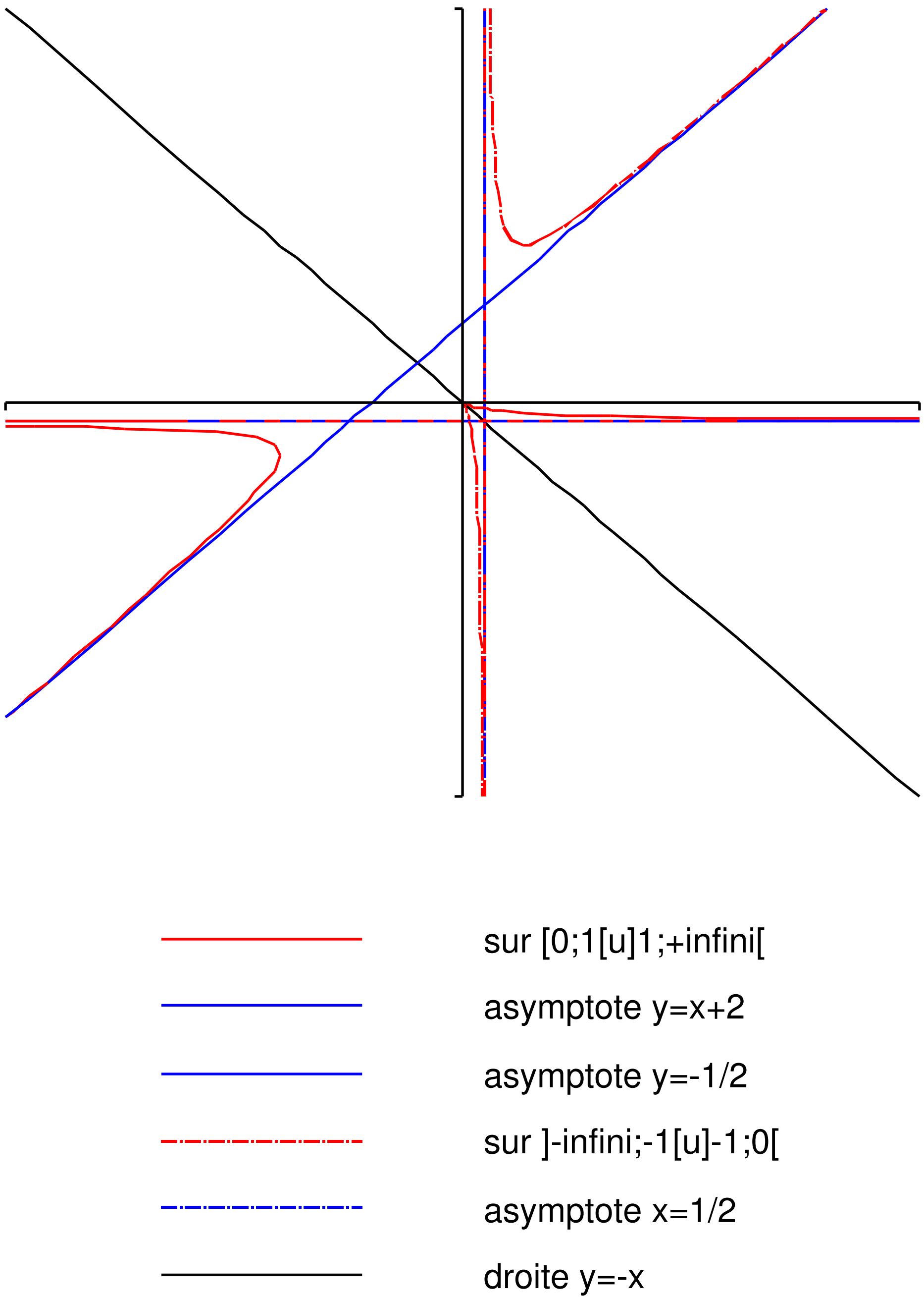
- $x(t) = \dfrac{1}{t(t-1)} \sim_1 \dfrac{1}{t-1} \xrightarrow[t\to 1^{\pm}]{} \pm\infty$ et $y(t) = \dfrac{-1}{t(t+1)} \sim_1 -\dfrac{1}{2}$

donc $\boxed{\text{il y a une asymptote d'équation } y = -\frac{1}{2} \text{ lorsque } t \to 1}$

et $y(t) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{t^2+t-2}{2t(t+1) = \frac{(t-1)(t+2)}{2t(t+1)}} \sim_1 \dfrac{3(t-1)}{4}$ aussi, au voisinage de 1

- si $t < 1$, la courbe est en dessous de l'asymptote $y = -\dfrac{1}{2}$ car $y(t) + \dfrac{1}{2} < 0$
- si $t > 1$, la courbe est au dessus de l'asymptote $y = -\dfrac{1}{2}$ car $y(t) + \dfrac{1}{2} > 0$

- Il n'y a pas de point stationnaire.



PROBLÈME n° 1 On considère l'arc paramétré donné par $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t\ln^3(t) \\ y(t) = t\ln^2(t) \end{array}\right.$ avec $x(0) = y(0) = \lambda$

Dans cet exercice, on note $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la fonction vectorielle associée à l'arc et M_t le point de paramètre t.

1) D'après les résultats de croissances comparées, on sait que $x(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ et $y(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$

aussi, $\boxed{\text{pour que } x \text{ et } y \text{ soient continues en 0, il faut et il suffit que } \lambda = x(0) = y(0) = 0}$

2) Par les théorèmes usuels, x et y sont clairement de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall t > 0, \quad x'(t) = \ln^3(t) + t \times \frac{1}{t} \times 3\ln^2(t) = \ln^2(t) \times (\ln(t) + 3) \quad \text{et, de même,} \quad y'(t) = \ln(t) \times (\ln(t) + 2)$$

- $x'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln^2(t) = 0$ ou $\ln(t) = -3 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = e^{-3}$
- $y'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln(t) = 0$ ou $\ln(t) = -2 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = e^{-2}$
- $x'(t)$ a le signe de $\ln(t) + 3$ car $\ln(t) \geq 0$

t	0		e^{-3}		1		$+\infty$
$x'(t)$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	

t	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$\ln(t)$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(t)+2$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$y'(t)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

3) Dressons alors le tableau des variations communes de x et y :

- Il est clair, par des limites usuelles, que :
  $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$
- Également : $x(1) = y(1) = 0$
- $x(e^{-3}) = \frac{1}{e^3} \times (-3)^3 = \frac{-27}{e^3} \simeq -1,35$

  $x(e^{-2}) = \frac{1}{e^2} \times (-2)^3 = \frac{-8}{e^2} \simeq -1,12$

  $y(e^{-3}) = \frac{1}{e^3} \times (-3)^2 = \frac{9}{e^3} \simeq 0,45$

  $y(e^{-2}) = \frac{1}{e^2} \times (-2)^2 = \frac{4}{e^2} \simeq 0,56$

en utilisant les données $e^{-2} \simeq 0,14$ et $e^{-3} \simeq 0,05$

t	0		e^{-3}		e^{-2}		1		$+\infty$
$x'(t)$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	
x	0	↘	$-27/e^3$	↗	$-8/e^2$	↗	0	↗	$+\infty$
y	0	↗	$9/e^3$	↗	$4/e^2$	↘	0	↗	$+\infty$
$y'(t)$	‖	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	

Notons $t_1 = e^{-3}$ et $t_2 = e^{-2}$, d'aprés le tableau,
la tangente à l'arc en M_{t_1} est verticale
la tangente à l'arc en M_{t_2} est horizontale

On remarque dans ce tableau : un point stationnaire pour $t = 1$ (étudié en question 4), un point limite pour $t \to 0^+$ (étudié en question 5) et une branche infinie (étudiée en question 5) pour $t \to +\infty$

4) On se place au voisinage du paramètre $t = 1$ aussi on pose $t = 1 + u$ de sorte que $t \to 1 \Leftrightarrow u \to 0$:

$$x(1+u) = (1+u)\Big(\ln(1+u)\Big)^3 \sim_0 1 \times u^3 \quad \text{car} \left\{\begin{array}{l} \ln(1+u) \sim_0 \\ 1+u \sim_0 u \end{array}\right. \quad \text{et donc} \quad \boxed{x(1+u) \sim_0 u^3}$$

$$\begin{aligned} y(1+u) = (1+u)\Big(\ln(1+u)\Big)^3 &= (1+u)\Big(u - \tfrac{u^2}{2} + \tfrac{u^3}{3} + o(u^3)\Big)^2 \quad \text{en utilisant le DL en 0 de } \ln(1+u) \\ &= (1+u)\Big(u^2 - 2 \times u \times \tfrac{u^2}{2} + o(u^3)\Big) \quad \text{en ne gardant que les termes de degré} \leq 3 \text{ dans le produit} \\ &= u^2 - u^3 + u^3 + o(u^3) \quad \text{et donc} \quad \boxed{y(1+u) =_0 u^2 + o(u^3)} \end{aligned}$$

On a vu qu'il y a un unique point singulier pour cet arc en $t = 1$ (seule valeur du paramètre t où $x'(t) = y'(t) = 0$)
Pour préciser la nature de ce point singulier M_1, on réalise un développement limité commun de x et y en $t = 1$ ou autrement dit un DL commun en 0 de $x(1+u)$ et $y(1+u)$. En utilisant la définition des équivalents, on a :

$$x(1+u) =_0 u^3 + o(u^3) \quad \text{et } y(1+u) =_0 u^2 + o(u^3)$$

$$\text{aussi} \quad f(1+u) = \begin{pmatrix} x(1+u) \\ y(1+u) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=f(1)} + u\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=f'(1)} + \frac{u^2}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=f''(1)} + \frac{u^3}{3!}\underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=f^{(3)}(1)} + \begin{pmatrix} o(u^3) \\ o(u^3) \end{pmatrix}$$

La première dérivée non nulle de f est $f''(1)$ donc $p = 1$
et la dérivée suivante non colinéaire est $f^{(3)}(1)$ d'où $q = 3$

$\boxed{M_1(0,0) \text{ est donc d'un point de rebroussement de première espèce}}$:

5) On étudie les limites en $+\infty$ et en 0 du quotient $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t\ln^2(t)}{t\ln^3(t)} = \frac{1}{\ln t}$

- Comme $\ln(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ on a $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0}$

  Cela nous permet de conclure sur la nature de la branche infinie lorsque t tend vers $+\infty$,

  $\boxed{\text{l'arc posséde une branche parabolique dans la direction de l'axe } (O,\vec{i}) \text{ lorsque } t \text{ tend vers } +\infty}$

- Comme $\ln(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -\infty$ on a $\boxed{\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0}$

  Autrement dit $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = 0$ et donc on peut conclure, par limite des cordes, que

  $\boxed{\text{l'arc présente au point limite } M_0(0,0) \text{ lorsque } t \text{ tend vers 0 une tangente horizontale}}$ (de pente nulle)

6)a) Soit Δ la droite d'équation $y = x$ et $\mathcal{C}$ l'arc,

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C}\cap\Delta \quad &\Leftrightarrow \quad \exists t \in [0,+\infty[, \quad x = x(t),\ y = y(t) \quad \text{et} \quad x = y \\ &\Leftrightarrow \quad \exists t \in [0,+\infty[, \quad x = x(t),\ y = y(t) \quad \text{et} \quad x(t) = y(t) \end{aligned}$$

Or : $y(t) - x(t) = t\ln^3(t) - t\ln^2(t) = t\ln^2(t) \times (\ln(t) - 1)$

donc $y(t) - x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $\ln^2(t) = 0$ ou $\ln(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 1$ ou $t = e$

Il y a donc trois points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = x$ pour les paramètres $t = 0,\ t = 1$ et $t = e$: il s'agit des points $M_0(0,0)$, $M_1(0,0)$ et $M_e(e,e)$