

PTSI : Correction des TD du chapitre III

Séance du 06/10/2011

EXERCICE R-4

a) Soit l'équation $(E) : z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$ alors

- Le sujet ne donnant pas d'indication (existence de racines réelles ou imaginaires pures), on recherche une racine évidente parmi les nombres $1, -1, i, -i, \dots$

Or : $i^3 - (2+i)i^2 + 2(1+i)i - 2i = -i + 2 + i + 2i - 2 - 2i = 0$ aussi i est une solution de l'équation

- On factorise par $(z-i)$ dans $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2$

En effectuant une division

$$\begin{array}{r|l} z^3 & - (2+i)z^2 & + 2(1+i)z & - 2i & z-i \\ - (z^3 & - iz^2) & & & z^2 - 2z + 2 \\ \hline & -2z^2 & + 2(1+i)z & - 2i & \\ & - (-2z^2 & + 2iz) & & \\ \hline & & 2z & - 2i & \\ & & - (2z & - 2i) & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Par identification des coefficients

On cherche des complexes a, b, c tels que

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-i)(az^2 + bz + c) \\ &= az^3 + (b-ia)z^2 + (c-ib)z - ic \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -(2+i) \\ c - ib = 2(1+i) \\ -ic = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 - i + i = -2 \\ c = 2 \\ c - ib = 2 - i(-2) = 2(1+i) \end{cases}$$

On en déduit la factorisation : $P(z) = (z-i)(z^2 - 2z + 2)$

- On résout alors l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$

Son discriminant est $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$ aussi ses racines sont $\frac{-(-2) - 2i}{2} = 1 - i$ et $1 + i$

- Reprenons alors la résolution de $(E) : (E) \Leftrightarrow (z-i)(z^2 - 2z + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow z = i$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow z = i$ ou $z = 1 - i$ ou $z = 1 + i$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ est $\mathcal{S} = \{i, 1+i, 1-i\}$

b) Soit l'équation $(E) : z^4 - 8(1+i)z^2 + 63 + 16i = 0$ alors

on remarque que : $(E) \Leftrightarrow Z^2 - 8(1+i)Z + 63 + 16i = 0$ où $Z = z^2$

- On résout d'abord dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8(1+i)z + 63 + 16i = 0$:

-son discriminant est $\Delta = 64(1+i)^2 - 4(63 + 16i) = 4(-63 + 16i)$

-on cherche une racine carrée de $-63 + 16i$ dans $\mathbb{C}$ sous la forme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$(x + iy)^2 = -63 + 16i \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -63$ et $2xy = 16$ et $|-63 + 16i| = \sqrt{63^2 + 16^2} = 65 = x^2 + y^2$
donc $2x^2 = 2$ et $2y^2 = 128$ soit $x = \pm 1$ et $y = \pm 8$ et aussi $xy > 0$ entraîne que x et y ont le même signe

aussi les racines carrées de $-63 + 16i$ sont $1 + 8i$ et $-1 - 8i$

De ce fait : $\Delta = 2^2(1 + 8i)^2$ donc une racine carrée de Δ est $\delta = 2(1 + 8i)$

- Les solutions de l'équation $z^2 - 8(1+i)z + 63 + 16i = 0$ sont donc :

$$z_- = \frac{8(1+i) - 2 - 16i}{2} = 3 - 4i \quad \text{et} \quad z_+ = \frac{8(1+i) + 2 + 16i}{2} = 5 + 12i$$

- On cherche, dans un second temps, les racines carrées de $3 - 4i$:

On remarque que : $3 - 4i = 4 - 1 - 2 \times 2 \times i = (2 - i)^2$ donc les racines carrées de $3 - 4i$ sont $2 - i$ et $-2 + i$

- On cherche, enfin, les racines carrées de $5 + 12i$:

On remarque que : $5 + 12i = 5 + 2 \times 6i = 5 + 2 \times 3 \times 2i = 9 - 4 + 2 \times 3 \times 2i = (3 + 2i)^2$

aussi les racines carrées de $5 + 12i$ sont $3 + 2i$ et $-3 - 2i$

On pouvez aussi faire une recherche classique sous la forme $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$(x + iy)^2 = 5 + 12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5$ et $2xy = 12$ et aussi $|5 + 12i| = \sqrt{25 + 144} = 13 = x^2 + y^2$ donc $2x^2 = 18$ et $2y^2 = 8$
soit $x = \pm 3$ et $y = \pm 2$ et aussi $xy > 0$ entraîne que les racines carrées de $5 + 12i$ sont $3 + 2i$ et $-3 - 2i$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est donc $\mathcal{S} = \{2 - i; -2 + i; 3 + 2i; -3 - 2i\}$

c) Soit l'équation $(E) : e^z + e^{-z} = \frac{3}{2}i$ alors : $(E) \Leftrightarrow 2(e^z)^2 + 2 = 3ie^z$ puisque $2e^z \neq 0$ car $|2e^z| = 2e^{\Re(z)} > 0$

• On résout l'équation $2Z^2 - 3iZ + 2 = 0$

Son discriminant est : $\Delta = (-3i)^2 - 4 \times 2 \times 2 = -9 - 16 = -25 = (5i)^2$ aussi une racine carrée de Δ est $5i$

Ses racines sont donc : $\frac{-(-3i) - 5i}{2 \times 2} = -\frac{i}{2}$ et $\frac{-(-3i) + 5i}{2 \times 2} = 4i$

- On résout alors : $e^z = -\frac{i}{2} \Leftrightarrow e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{\Re(z)} = \frac{1}{2}$ et $\Im(z) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$
 $\Leftrightarrow \Re(z) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$ et $\Im(z) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$
 $\Leftrightarrow z \in \left\{ -\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
- De même, on a : $e^z = 4i \Leftrightarrow z \in \left\{ 2\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ puisque $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$

Finalement : $(E) \Leftrightarrow 2Z^2 - 3iZ + 2 = 0$ et $Z = e^z$

$\Leftrightarrow e^z = -\frac{i}{2}$ ou $e^z = 4i$

$\Leftrightarrow z \in \left\{ -\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ou $z \in \left\{ 2\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\mathcal{S} = \left\{ -\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$