PTSI : Correction des TD du chapitre IV

Séance du 20/10/2011

EXERCICE E-2 *Changement de fonction inconnue*

Soit l'équation différentielle (E) : $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$

1) Si $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivables sur I et si on définit z sur I par : $\forall x \in I, \quad z(x) = xy(x)$

alors z est aussi deux fois dérivables sur I et : $\forall x \in I, \quad z'(x) = y(x) + xy'(x) \quad \text{et} \quad z''(x) = 2y'(x) + xy''(x)$

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + (x+2)y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad \underbrace{(xy''(x) + 2y'(x))}_{=z''(x)} + 2\underbrace{(xy'(x) + 2y(x))}_{=z'(x)} + \underbrace{xy(x)}_{=z(x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad z''(x) + 2z'(x) + z(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \text{ est solution sur } I \text{ de l'équation (E') : } z'' + 2z' + z = 0 \end{aligned}$$

2) On veut résoudre (E) sur $I =]0; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty; 0[$). D'après 1) et comme $x \neq 0$ sur I ,

les solutions de (E) sur I sont les fonctions $\left[y : x \mapsto \frac{z(x)}{x} \right]$ où z est une solution de (E')

L'équation caractéristique de (E') est $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0$ donc il y a une racine double $r_0 = -1$ aussi les solutions sur I de (E') sont donc les fonctions $[z : x \mapsto (Ax + B)e^{-x}]$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow [z : x \mapsto xy(x)] \text{ est solution de (E') sur } I \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in I, \quad z(x) = xy(x) = (Ax + B)e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in I, \quad y(x) = \left(A + \frac{B}{x} \right) e^{-x} \text{ (car } x \neq 0 \text{ si } x \in I) \end{aligned}$$

Si I est $]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$, l'ensemble des solutions sur I de (E) est $\mathcal{S}_I = \left\{ \left[\begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(A + \frac{B}{x} \right) e^{-x} \end{array} \right] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

3) • Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors c'est une solution sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$ aussi :

-il existe des réels α et β tels que : $\forall x < 0, \quad f(x) = \left(\alpha + \frac{\beta}{x} \right) e^{-x}$

-il existe des réels A et B tels que : $\forall x > 0, \quad f(x) = \left(A + \frac{B}{x} \right) e^{-x}$

• Comme f est une solution sur $\mathbb{R}$, f doit être continue en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \begin{cases} \text{sg}(B)\infty & \text{si } B \neq 0 \\ A & \text{si } B = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \begin{cases} -\text{sg}(\beta)\infty & \text{si } \beta \neq 0 \\ \alpha & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$$

aussi, pour que f soit continue en 0, il est nécessaire que $B = \beta = 0$ et $A = \alpha = f(0)$

De sorte que finalement, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = Ae^{-x}$.

• Réciproquement, les fonctions $[x \mapsto Ae^{-x}]$ où $A \in \mathbb{R}$ sont bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et on vérifie qu'elles sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ \left[\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^{-x} \end{array} \right] \mid A \in \mathbb{R} \right\}$

- 1) Si y est une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et, si z est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(e^t)$ alors z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est la composée de $t \mapsto e^t$ qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0; +\infty[$ suivie de y .

$$\text{De plus, pour tout } t \text{ réel, on a : } \quad z'(t) = e^t y'(e^t) \quad \text{et} \quad z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$$

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E) sur }]0; +\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad (e^t)^2 y''(e^t) - e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t)}_{=z''(t)} - \underbrace{e^t y'(e^t)}_{=-2z'(t)} + \underbrace{y(e^t)}_{z(t)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de (E') : } \quad z'' - 2z' + z = 0 \end{aligned}$$

- 2) On résout (E') sur $\mathbb{R}$: l'équation caractéristique de (E') est $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r - 1)^2 = 0$ donc il y a une racine double $r_0 = 1$. Les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $\left[t \mapsto (At + B)e^t \right]$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E) sur }]0; +\infty[&\Leftrightarrow \left[z : t \mapsto y(e^t) \right] \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de (E') : } \quad z'' - 2z' + z = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(e^t) = (At + B)e^t \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x > 0, \quad y(x) = (A \ln x + B)e^{\ln x} = Ax \ln x + Bx \\ &\quad \text{en posant } t = \ln x \text{ puisque } \ln \text{ est une bijection de }]0; +\infty[\text{ dans } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) sont les fonctions $f_{A,B}$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_{A,B}(x) = Ax \ln x + Bx$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

- 3) Pour résoudre sur $] -\infty, 0[$, on va utiliser le changement de variables $x = -e^t$ puisque la fonction $[t \mapsto -e^t]$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -\infty; 0[$. Si on pose $z(t) = y(-e^t)$, alors on vérifie que :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E) sur }] -\infty; 0[&\Leftrightarrow z \text{ est solution de (E') : } \quad z'' - 2z' + z = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(-e^t) = (At + B)e^t \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x < 0, \quad y(x) = (A \ln(-x) + B)e^{\ln(-x)} \\ &\quad = (-A)x \ln |x| + (-B)x \\ &\quad \text{en posant } t = \ln(-x) = \ln |x| \text{ car } x \mapsto \ln(-x) \text{ est une bijection de }] -\infty; 0[\text{ dans } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ de (E) sont les fonctions $g_{\alpha,\beta}$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ par $g_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x \ln |x| + \beta x$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

(On a l'égalité ensembliste $\{(-A, -B) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ d'où le passage de $-A, -B$ à α, β)

- 4) • Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) alors

c'est une solution sur $]0; +\infty[$ et sur $] -\infty; 0[$ aussi :

$$\text{-il existe des réels } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que : } \quad \forall x < 0, \quad f(x) = \alpha x \ln |x| + \beta x$$

$$\text{-il existe des réels } A \text{ et } B \text{ tels que : } \quad \forall x > 0, \quad f(x) = Ax \ln x + Bx = Ax \ln |x| + Bx$$

f doit aussi être continue en 0. Or : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0$
donc f est bien continue en 0 et $f(0) = 0$

f doit également être dérivable en 0. Or : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (A \ln |x| + B) = \begin{cases} -\text{sg}(A)\infty & \text{si } A \neq 0 \\ B & \text{si } A = 0 \end{cases}$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha \ln |x| + \beta) = \begin{cases} -\text{sg}(\alpha)\infty & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \beta & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

aussi, pour que f soit dérivable en 0, il est nécessaire que $\alpha = A = 0$ et $B = \beta$ et alors $f'(0) = B$

Finalement, pour tout x réel, $f(x) = Bx$ où B est une constante réelle.

- On vérifie que $[x \mapsto Bx]$ où $B \in \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que c'est une solution de (E).

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions linéaires $[x \mapsto Bx]$ où $B \in \mathbb{R}$

EXERCICE E-1

Une équation différentielle avec paramètre

a est un paramètre réel et on considère l'équation différentielle (E_a) : $y'' - (1+a)y' + ay = e^{a^2x}$

On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_a$ des solutions réelles de (E_a) sur $\mathbb{R}$

- On résout d'abord l'équation homogène associée à (E_a) qui est $y'' - (1+a)y' + ay = 0$ (H_a)
L'équation caractéristique de (H_a) est $r^2 - (1+a)r + a = 0$ de discriminant $\Delta = (1+a)^2 - 4a = (1-a)^2$
Il y a donc deux cas possibles :

-si $a = 1$ alors l'équation caractéristique a une racine double $r_0 = \frac{1+a}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (ici $a = 1 \dots$)
et l'ensemble des solutions homogènes est $\mathcal{S}_{1,H} = \{[x \mapsto (Ax + B)e^x] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

-si $a \neq 1$ alors il a deux racines distinctes $r_+ = \frac{(1+a) + (1-a)}{2} = 1$ et $r_- = \frac{(1+a) - (1-a)}{2} = a$
et l'ensemble des solutions homogènes est $\mathcal{S}_{a,H} = \{[x \mapsto Ae^{ax} + Be^x] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

- On cherche désormais une solution particulière de (E_a) .

Le second membre de (E_a) est du type " $P(x)e^{mx}$ " où P est une fonction polynômiale (ici $P(x) = 1$) et $m = a^2$

On sait qu'on cherche une solution particulière du type $[y : x \mapsto Q(x)e^{mx}]$ où Q est une fonction polynômiale de degré $\deg(P)$, $\deg(P) + 1$ ou $\deg(P) + 2$ selon que m ne soit pas racine, soit racine simple ou racine double de l'équation caractéristique.

Mais : $m = a^2$ est racine de l'équation caractéristique $\Leftrightarrow a^2 = a$ ou $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = -1$

Il y a donc quatre cas possibles : $a = 1$, $a = 0$, $a = -1$ et $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

-si $a = 1$ alors $m = a^2 = 1$ est une racine double et donc on cherche la solution particulière y sous la forme
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (\alpha x^2 + \underbrace{\beta x + \gamma}_{\text{solution homogène}})e^x$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ (Ici, $\deg(P) = 0$) et même : $y(x) = \alpha x^2 e^x$ ($\times 1$)

alors $y'(x) = (\alpha x^2 + 2\alpha x + \beta)e^x$ ($\times -2$) et $y''(x) = (\alpha x^2 + 4\alpha x + 2\alpha)e^x$ ($\times 1$)

Ici, $a = 1$ donc $-(1+a) = -2 \dots$

aussi : y est solution de $(E_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $2\alpha e^x = e^x$ et il suffit que $\alpha = \frac{1}{2}$

Autrement dit, une solution particulière de (E_1) est $[x \mapsto \frac{x^2}{2}e^x]$

et l'ensemble des solutions réelles de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{S}_1 = \left\{ \left[x \mapsto (Ax + B)e^x + \frac{x^2}{2}e^x \right] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

-si $a = 0$ alors $m = a^2 = 0$ est une racine simple et on cherche donc la solution particulière y sous la forme
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{0 \times x} = \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (Ici, $\deg(P) = 0$) et même : $y(x) = \alpha x$ ($\times 0$)

alors $y'(x) = \alpha$ ($\times - (1+0) = -1$) et $y''(x) = 0$ ($\times 1$)

aussi : y est solution de $(E_0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $-\alpha = 1$ et il suffit que $\alpha = -1$

Autrement dit, une solution particulière de (E_0) est $[x \mapsto -xe^x]$

et l'ensemble des solutions réelles de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{S}_0 = \left\{ \left[x \mapsto \underbrace{A}_{\text{car } a=0 \dots} + Be^x - xe^x \right] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

-si $a = -1$ alors $m = a^2 = 1$ est une racine simple et on cherche donc la solution particulière y sous la forme
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (Ici, $\deg(P) = 0$) et même : $y(x) = \alpha x e^x$ ($\times -1$)

alors $y'(x) = (\alpha x + \alpha)e^x$ ($\times - (1-1) = 0$) et $y''(x) = (\alpha x + 2\alpha)e^x$ ($\times 1$)

aussi : y est solution de $(E_{-1}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $2\alpha e^x = e^x$ et il suffit que $\alpha = \frac{1}{2}$

Autrement dit, une solution particulière de (E_{-1}) est $[x \mapsto -\frac{x}{2}e^x]$

et l'ensemble des solutions réelles de (E_{-1}) sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{S}_{-1} = \left\{ \left[x \mapsto Ae^{-x} + Be^x - \frac{x}{2}e^x \right] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

-si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ alors $m = a^2$ n'est pas une racine et on cherche donc la solution particulière y sous la forme

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \alpha e^{a^2x}$ ($\times a$) où $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $y'(x) = a^2 \alpha e^{a^2x}$ ($\times - (1+a)$) et $y''(x) = a^4 \alpha e^{a^2x}$ ($\times 1$)

aussi : y est solution de $(E_a) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $(a^4 - a^2 - a^3 + a)\alpha e^{a^2x} = e^{a^2x} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{a(a-1)^2(a+1)}$

puisque $a^4 - a^2 - a^3 + a = a^2(a^2 - 1) - a(a^2 - 1) = a(a^2 - 1)(a - 1)$

Autrement dit, une solution particulière de (E_a) est $[x \mapsto \frac{1}{a(a+1)(a-1)^2}e^{a^2x}]$ et

l'ensemble des solutions réelles de (E_a) sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{S}_a = \left\{ \left[x \mapsto Ae^{ax} + Be^x + \frac{1}{a(a+1)(a-1)^2}e^{a^2x} \right] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

EXERCICE E-4

Soit l'équation différentielle (E) : $xy'' + (3x + 2)y' + 3(x + 1)y = 0$

1) Si $[y : I \rightarrow \mathbb{R}]$ est une fonction deux fois dérivable sur I et si on définit z sur I par : $\forall x \in I, z(x) = xe^x y(x)$ alors z est aussi deux fois dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, z'(x) = (x + 1)e^x y(x) + xe^x y'(x) \quad \text{et} \quad z''(x) = (x + 2)e^x y(x) + 2(x + 1)e^x y'(x) + xe^x y''(x)$$

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, xy''(x) + (3x + 2)y'(x) + 3(x + 1)y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, \left(xy''(x) + (3x + 2)y'(x) + 3(x + 1)y(x)\right)e^x = 0 \quad \text{car } e^x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, z''(x) - \left((x + 2)e^x y(x) + 2(x + 1)e^x y'(x)\right) \\ &\quad + \left((3x + 2)y'(x) + 3(x + 1)y(x)\right)e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, z''(x) + \left(xy'(x) + (2x + 1)y(x)\right)e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, z''(x) + z'(x) - \left((x + 1)e^x y(x)\right) + \left((2x + 1)y(x)\right)e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, z''(x) + z'(x) + z(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \text{ est solution sur } I \text{ de l'équation (E') : } z'' + z' + z = 0 \end{aligned}$$

2) On veut résoudre (E) sur $I =]0; +\infty[$ (resp. $I =]-\infty; 0[$). D'après 1) et comme $xe^x \neq 0$ sur I ,

les solutions de (E) sur I sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{z(x)}{xe^x}$ où z est une solution de (E')

L'équation caractéristique de (E') est $r^2 + r + 1 = 0$ de racines complexes j et j^2 où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (de discriminant $\Delta < 0$) :

les solutions réelles sur I de (E') sont donc les fonctions $\left[z : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) \right]$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow [z : x \mapsto xe^x y(x)] \text{ est solution de (E') sur } I \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, z(x) = xe^x y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, y(x) = \frac{e^{-\frac{3}{2}x}}{x} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) \end{aligned}$$

(car $xe^x \neq 0$ si $x \in I$)

L'ensemble des solutions sur I de (E) est $\mathcal{S}_I = \left\{ \left[\begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-\frac{3}{2}x}}{x} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) \end{array} \right] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

3) • Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ alors :

-il existe des réels α et β tels que : $\forall x < 0, f(x) = \frac{e^{-\frac{3}{2}x}}{x} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$

-il existe des réels A et B tels que : $\forall x > 0, f(x) = \frac{e^{-\frac{3}{2}x}}{x} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$

- f doit être continue en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } A \neq 0 \text{ alors } \begin{cases} \frac{e^{-\frac{3}{2}x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \\ A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} A \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \pm\infty \text{ et, de même, en } 0^- \text{ si } \alpha \neq 0$$

la continuité de f en 0 impose donc $A = \alpha = 0$ (car la limite, si elle existe, doit être réelle)

Pour lever alors l'indéterminée en 0, on utilise un DL(0) du sinus :

$$\begin{aligned} \text{Si } x > 0 : f(x) = \frac{e^{-\frac{3}{2}x}}{x} \times B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) &= \frac{e^{-\frac{3}{2}x}}{x} \times B \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}x\varepsilon(x) \right) \quad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= e^{-\frac{3}{2}x} \times B \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon(x) \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3}}{2}B \text{ et de même en } 0^- \text{ avec } \beta \end{aligned}$$

aussi la continuité de f en 0 impose donc $B = \beta$ et, finalement,

les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $\left[\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto B \frac{e^{-\frac{3}{2}x}}{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{array} \right]$ où $B \in \mathbb{R}$