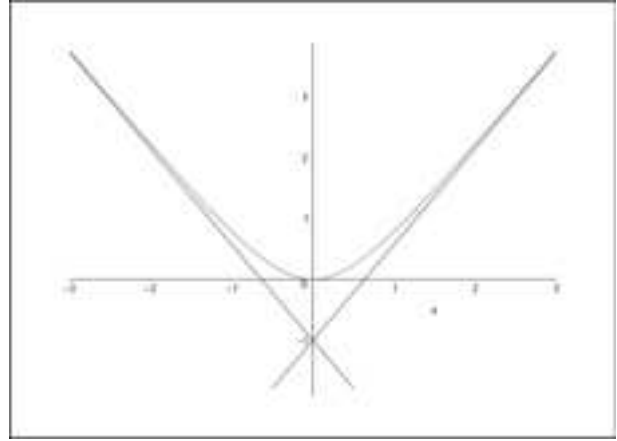


CORRECTION D'EXERCICES DU CHAPITRE V

EXERCICE R-4)b) Étude de la fonction f définie par : $f(x) = x \arctan x$

- **Domaine de définition, domaine d'étude**
 - > La fonction f est clairement définie sur $\mathbb{R}$
 - > $\mathbb{R}$ est un domaine centré en 0 et :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-x) \arctan(-x) = x \arctan(x) = f(x)$
 par imparité de $\arctan$
 la fonction f est donc paire
 et il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$



- **Régularité** Les théorèmes usuels assurent la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $[0, +\infty[$

$$\text{et : } \forall x \geq 0, \quad f'(x) = \underbrace{\arctan(x)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\text{et } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \arctan(x) = \frac{x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Le tableau de variation est :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
f	0	$\nearrow$

$$f(0) = 0 \times \arctan(0) = 0$$

$$\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \text{ donc } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty : \text{ il y a une branche infinie à étudier}$$

$$* \frac{f(x)}{x} = \arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

$$* f(x) - \frac{\pi}{2}x = x \left(\underbrace{\arctan(x) - \frac{\pi}{2}}_{=-\arctan \frac{1}{x}} \right) = -\frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -(\arctan)'(0) = -1$$

La droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ est une asymptote à la courbe en $+\infty$ et, par parité, la droite d'équation $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ est aussi une asymptote à la courbe en $-\infty$

On a utilisé la relation du cours : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \text{sg}(x) \frac{\pi}{2}$
 et la limite usuelle liée aux taux d'accroissement de $\arctan$ en 0 : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan(t)}{t} = \arctan'(0) = 1$

EXERCICE R-4) B) Simplifier $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

- **Approche analytique** : On introduit la fonction f donnée par $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

- **Définition** : On sait que $\arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$ donc $f(x)$ existe lorsque $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$. Mais sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow 0 \leq (1-x)^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \Leftrightarrow 2x \leq -(1+x^2) \Leftrightarrow (1+x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

de sorte que $f(x)$ existe pour tout x réel : f est définie sur $\mathbb{R}$

- **Parité/Imparité** : $\mathbb{R}$ est centré en 0 et, par imparité de $\arcsin$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \arcsin \left(\frac{-2x}{1+x^2} \right) = -f(x)$

La fonction f est impaire

- **Continuité** : $\left[x \mapsto \frac{2x}{1+x^2} \right]$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $1+x^2 \neq 0$) à valeurs dans $[-1, 1]$ où $\arcsin$ est continue

donc, par composition, f est continue sur $\mathbb{R}$

- **Dérivabilité** : $\frac{2x}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x = 1+x^2 \Leftrightarrow 0 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x = 1$ et $\frac{2x}{1+x^2} = -1 \Leftrightarrow (1+x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Les théorèmes usuels assurent la dérivabilité de f sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et on peut calculer le nombre dérivée $f'(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \quad f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)' \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2}} = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2 - 4x^2}}$$

$$\text{soit } f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \text{ d'où finalement}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \quad f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \times \frac{1}{|1-x^2|}$$

Etude en 0 : $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$ donc, par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 2$

Etude en 1 : $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 1$ et $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} -1$ donc, par le théorème de prolongement d'une dérivée,

f n'est pas dérivable en 1 mais la courbe représentative de f admet au point $(1, \frac{\pi}{2})$ des demi-tangentes de pentes ± 1

- **Expression simplifiée** : On remarque que la dérivée se simplifie selon le signe de $1-x^2$

Sur $] -1, 1[$: $1-x^2 > 0$ aussi $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} = (2 \arctan x)'$ de sorte que $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in] -1, 1[, f(x) = 2 \arctan x + k$

et on détermine k : $k = f(0) = \arcsin 0 = 0$ donc $\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2 \arctan x$

Sur $]1, +\infty[: 1 - x^2 < 0$ aussi $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} = (-2 \arctan x)'$ soit $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1, 1[, f(x) = -2 \arctan x + c$

Déterminons c : $f(x) = \arcsin \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \arcsin(0) = 0$ et $-2 \arctan x + c \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -2 \times \frac{\pi}{2} + c$ donc $c = \pi$

Ainsi : $\boxed{\forall x > 1, f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2 \arctan x}$ et, par imparité : $\boxed{\forall x < -1, f(x) = -f(-x) = -\pi + 2 \arctan x}$

• **Approche algébrique** : On remarque que $\frac{2t}{1+t^2} = \sin x$ où $t = \tan \frac{x}{2}$ d'où l'idée de changer de variable.

Pour t réel, on définit : $x = 2 \arctan t$ alors $\tan \frac{x}{2} = t$ et on a : $f(t) = \arcsin(\sin x)$

Attention ! $\arcsin(\sin x) = x$ seulement si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ or, à priori, $x = 2 \arctan t \in]-\pi, \pi[$

1er cas : si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \arctan t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow t \in [-1, 1]$ alors $f(t) = x = 2 \arctan t$

2eme cas : si $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\Leftrightarrow \arctan t \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow t > 1$ alors, comme $\sin x = \sin(\pi - x)$ et que $\pi - x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$f(t) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x = \pi - 2 \arctan t$$

3eme cas : si $x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \arctan t \in]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow t < -1$ alors, comme $\sin x = -\sin(\pi + x)$ et que $\pi + x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$f(t) = \arcsin(-\sin(\pi + x)) = -\arcsin(\sin(\pi + x)) = -(\pi + x) = -\pi + 2 \arctan t$$

EXERCICE R-4) c) Simplifier $\arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$: On introduit l'application f donnée par : $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

• $f(x)$ existe lorsque $1 + \cos x \neq 0$ et $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \geq 0$

Or : $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $1 - \cos x \geq 0$ et $1 + \cos x \geq 0$ aussi, si $1 + \cos x \neq 0$, $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \geq 0$

Finalement, $f(x)$ existe lorsque $1 + \cos x \neq 0$ soit $x \neq \pi [2\pi]$. f est définie sur $\mathbb{R} - \{(1+2k)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

• On remarque que f est 2π périodique et paire aussi il suffit de déterminer $f(x)$ pour $x \in [0, \pi[$.

• On détermine $f(x)$ pour $x \in [0, \pi[$: Si $x \in [0, \pi[$ alors $\frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ de sorte qu'on peut définir $t = \tan \frac{x}{2}$

et on sait alors que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Aussi : $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t^2}{2} = t^2$ aussi $f(x) = \arctan \sqrt{t^2} = \arctan |t|$

Mais : $\frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow t = \tan \frac{x}{2} \geq 0$ donc $f(x) = \arctan t = \arctan(\tan \frac{x}{2}) = \frac{x}{2}$ car $\frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[\subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

• Ainsi : $\forall x \in [0, \pi[, f(x) = \frac{x}{2}$ et, par parité : $\forall x \in]-\pi, 0], f(x) = f(-x) = \frac{-x}{2}$

On connaît donc f sur $] -\pi, \pi[$, intervalle d'amplitude 2π , aussi, par 2π périodicité, on connaît f sur $\mathbb{R} - \{(1+2k)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque On peut tenter une approche analytique : on justifie la continuité de f sur $[0, \pi[$, sa dérivabilité sur $]0, \pi[$

puis que : $\forall x \in]0, \pi[, f'(x) = \frac{1}{2}$ d'où $f(x) = \frac{x}{2} + k$ avec k réel déterminé par continuité en 0 : $k = f(0) = \arctan 0 = 0$

Mais le calcul de dérivée est très fastidieux ! (Avec 4 fonctions composées...)

EXERCICE R-6) b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$ (E)

On travaille par implication. On a : (E) $\Rightarrow \tan(\arctan x + \arctan(2x)) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

or $\tan(\arctan x + \arctan(2x)) = \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan(2x))}{1 - \tan(\arctan x) \tan(\arctan(2x))} = \frac{x + 2x}{1 - x \times (2x)} = \frac{3x}{1 - 2x^2}$ aussi

(E) $\Rightarrow \frac{3x}{1-2x^2} = 1 \Rightarrow 3x = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ ou $x = x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$

Il reste à vérifier si x_1 et x_2 sont des solutions de (E). Clairement : $x_2 < 0$ donc $\underbrace{\arctan(x_2)}_{<0} + \underbrace{\arctan(2x_2)}_{<0} \neq \frac{\pi}{4}$

Ainsi, x_2 n'est pas solution. Pour x_1 , on prouve les réciproques non triviales du cas général.

On sait que : $3x_1 = 1 - 2x_1^2$ mais $2x_1^2 - 1 \neq 0$ donc on a : $\frac{3x_1}{1-2x_1^2} = 1 \Leftrightarrow \tan(\arctan x_1 + \arctan(2x_1)) = \tan \frac{\pi}{4}$

Prouvons que $\arctan x_1 + \arctan(2x_1)$ est dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On sait que : $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \simeq \frac{-3+4}{4} \simeq 0.25$

donc $0 < x_1 < 2x_1 < 1$ et, par stricte croissance de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$, on a : $0 < \arctan(x_1) < \arctan(2x_1) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Aussi $\arctan(x_1) + \arctan(2x_1) \in]0, \frac{\pi}{2}[\subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On a donc : $\begin{cases} \tan(\arctan x_1 + \arctan(2x_1)) = \tan \frac{\pi}{4} \\ \arctan(x_1) + \arctan(2x_1) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Rightarrow \arctan x_1 + \arctan(2x_1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan$ est bijective sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x_1\} = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}}$$